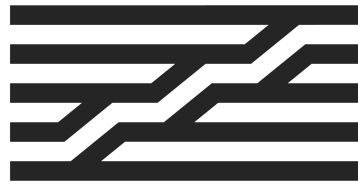


ircam
Centre
Pompidou



Stage de recherche - Master ATIAM

Méthode de projection pour la simulation de
systèmes implicites passifs :
vers une application à l'appareil vocal

Rapport de stage

Laboratoire STMS (Ircam, CNRS, Sorbonne Université) - équipe S3AM

Paul Estève

Encadrants : **Thomas Risse**
Thomas Hélie

ATIAM 2023/2024

Dates du stage : 04/03/2024 - 31/08/2024

Table des matières

Introduction	5
1 Systèmes Hamiltoniens à ports (en dimension finie)	7
1.1 Motivations et introduction aux SHP	7
1.1.1 Propriétés et descriptions des SHP	8
1.1.2 Exemple de système Hamiltonien à ports	9
1.2 Structure de Dirac	10
1.3 Formulation différentielle-algébrique semi-explicite	11
1.4 Formulations implicites	12
1.4.1 Motivations	12
1.4.2 Représentations noyau et image	13
1.4.3 Représentation hybride	14
1.5 Notations	14
2 Méthode de projection temporelle PM	17
2.1 Motivations	17
2.2 Description de la méthode	17
2.2.1 Formulation par trames	18
2.2.2 Projection temporelle	20
2.3 Implémentation de la méthode	24
2.3.1 Propriétés de la méthode PM en représentation noyau	26
2.4 Exemple d'application : circuit LLC	27
3 Vers une application à l'appareil vocal	37
3.1 Présentation du modèle de Wetzels [24]	37
3.2 Représentation noyau et image du modèle	37
3.2.1 Modèle pour un seul tronçon	37
3.2.2 Concaténation de tronçons	38
Conclusion et perspectives	41
A Preuves	43
A.1 Existence et unicité de l'adjoint pour une forme bilinéaire non dégénérée mais non définie positive	43
A.2 Représentation noyau et image d'une structure de Dirac	44
A.2.1 Représentation image et structure de Dirac	44
A.2.2 Équivalence représentations noyau et image	45
Résumé	49

Introduction

La modélisation et la simulation de systèmes physiques acoustiques complexes est un des sujets de recherche principaux de l'équipe S3AM (Systèmes et Signaux Sonores : Audio/Acoustique, instruMents) du laboratoire STMS hébergé à l'Ircam. Ce travail, cherchant à reproduire le comportement du système étudié, permet à la fois de reproduire le son produit par le système, mais aussi de mieux comprendre les mécanismes à l'origine de ce son.

L'équipe s'intéresse notamment à des formalismes comme celui des systèmes Hamiltoniens à ports (SHP), permettant le respect de certaines propriétés physiques des systèmes étudiés, comme le bilan de puissance. Afin de profiter d'une telle mise en forme du modèle physique établi, il est nécessaire de disposer de méthodes numériques permettant de simuler le modèle tout en garantissant le respect de ces propriétés. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce stage, qui vise à développer une méthode de simulation numérique, fondée sur de nouvelles méthodes de projection spatio-temporelles qui respectent structurellement le bilan de puissance du problème physique original.

Après avoir développé et implémenté cette méthode, utile dans différents projets de l'équipe, l'objectif est de l'appliquer à la simulation de l'appareil vocal, en s'appuyant sur les modèles sur lesquels travaille Thomas Risse durant sa thèse sur la modélisation physique de l'appareil vocal.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet AVATARS (Artificial voice production : control of bio-inspired port-Hamiltonian numerical and mechatronic models). Ce projet vise à mieux comprendre l'appareil vocal à travers plusieurs axes : mesures in vivo et ex vivo, robots biomimétiques de l'appareil vocal (larynx et conduit vocal) et simulations numériques de modèles physiques. Ce stage s'inscrit donc dans le 3e axe du projet.

Plan du rapport Ce rapport est structuré en trois parties. Dans un premier temps, on présentera les systèmes Hamiltoniens à ports (SHP) et les différentes représentations possibles de ces systèmes. On s'intéressera ensuite à la méthode de projection temporelle RPM développée dans [17] et prolongée dans ce stage, qui permet de simuler des SHP tout en garantissant le respect du bilan de puissance, avec un ordre de précision choisi. Enfin, on présentera le travail effectué pour préparer l'application de cette méthode à la simulation du conduit vocal, en utilisant le modèle de [24].

Chapitre 1

Systemes Hamiltoniens à ports (en dimension finie)

1.1 Motivations et introduction aux SHP

Pour des systèmes physiques complexes, il est souvent impossible de résoudre analytiquement les équations différentielles qui les régissent. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour simuler le comportement du système. Il existe de nombreuses méthodes de résolution numériques, comme les méthodes d'Euler (explicites et implicites), de Runge-Kutta [1]. Cependant, pour un système physique (qui satisfait un bilan de puissance), la plupart de ces méthodes cassent cette propriété : la puissance injectée dans le système n'est pas égale à la somme de la puissance stockée et de la puissance dissipée. La conséquence est que des instabilités numériques peuvent apparaître (en particulier pour les systèmes non linéaires). Nous nous intéressons à une approche globale qui garantit cette propriété physique.

Exemple électronique simple : circuit RLC

En adoptant la convention récepteur¹ pour tous les composants du circuit figure 1.1, ce bilan s'exprime sous la forme suivante :

$$P_L + P_C + P_R + P_G = 0$$

où P_L et P_C sont les puissances liées au stockage d'énergie dans l'inductance et le condensateur, P_R est la puissance dissipée par la résistance et P_G est la puissance reçue par le générateur. De manière plus générale, $P_{st} + P_{diss} + P_{ext} = 0$.

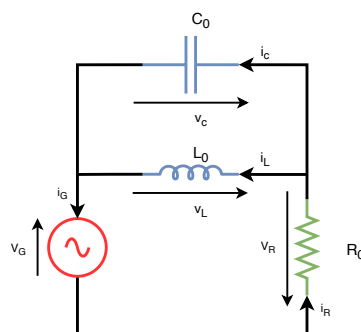


FIGURE 1.1 – Circuit générateur-RLC. Les composants stockant de l'énergie sont l'inductance L et le condensateur C , le composant sans mémoire (ici dissipatif) est la résistance R , et le port d'interaction avec l'environnement est connecté au générateur G .

Lorsque le système étudié comporte par exemple des phénomènes non linéaires, l'utilisation d'une méthode ne vérifiant pas ce bilan de puissance, et d'un pas de temps inadéquat peut entraîner une instabilité de la simulation.

1. puissance comptée positivement quand reçue par le composant

Pour éviter cet écueil, il existe des formalismes et des méthodes numériques liées qui garantissent le respect du bilan de puissance, comme les systèmes Hamiltoniens à ports (SHP).

Ces derniers ont été introduits par Maschke et Van der Schaft dans [14] en se basant sur des considérations énergétiques et en s'inspirant de la modélisation par ports (c'est-à-dire les connexions entre composants), de la mécanique géométrique et de la théorie du contrôle [22].

Plaçant les considérations énergétiques au cœur de la modélisation et des interactions entre différents domaines physiques, les SHP permettent de représenter de manière unifiée des systèmes multiphysiques, (comme l'appareil vocal qui fait intervenir un couplage entre phénomènes non linéaires mécaniques, fluidiques et acoustiques).

Comme présenté dans [19], les SHP ont été largement utilisés pour la modélisation et la simulation dans différents domaines appliqués au son :

- Circuits électriques non linéaires : [17, 20, 4].
- Instruments à vent de la famille des cuivres : [13, 11, 12]
- Vibrations de poutre [6, 9]

1.1.1 Propriétés et descriptions des SHP

Les SHP se démarquent grâce à deux propriétés principales : le respect du bilan de puissance, et leur modularité. En effet, les SHP permettent de représenter des systèmes complexes en les décomposant en sous-systèmes plus simples, qui peuvent être analysés et modélisés indépendamment les uns des autres. Les SHP de chaque sous-système peuvent ensuite être combinés pour former un SHP global, respectant toujours le bilan de puissance.

La représentation sous forme de SHP comprend deux éléments :

- une structure de Dirac qui joue le rôle des pistes d'un circuit imprimé : elle correspond aux interconnexions entre les composants. Cette structure de Dirac est l'élément qui garantit le respect du bilan de puissance. Elle peut être définie par différentes représentations, voir sections 1.3 et 1.4.
- des lois pour chaque composant, reliant les efforts aux états pour les composants stockants de l'énergie, et reliant les efforts aux flux pour les éléments dissipant de la puissance. Ces lois garantissent la passivité (stockage/restitution de puissance ou dissipation de puissance positive).

Comme illustré avec l'exemple 1.1, les composants sont séparés en 3 catégories :

1. les composants stockants d'état \mathbf{x} , qui stockent une énergie totale $H(\mathbf{x})$ (inductance L et condensateur C)
2. les composants sans mémoire, décrits par une loi d'effort $\mathbf{z}(\mathbf{w})$ pour un flux \mathbf{w} qui dissipent une puissance $P_{diss} := \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} \geq 0$ (résistance R)
3. les composants externes, recevant une puissance $P_{ext} := \mathbf{u}^T \mathbf{y}$ à travers les ports du système, avec \mathbf{u} les entrées du système et \mathbf{y} les sorties. Ces composants permettent les échanges d'énergie avec l'extérieur (générateur G)

La structure de Dirac peut dans un premier temps² être représentée par une matrice \mathbf{S} reliant les vecteurs des flux \mathbf{f} et des efforts \mathbf{e} .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{xx}} & \mathbf{S}_{\mathbf{xw}} & \mathbf{S}_{\mathbf{xu}} \\ * & \mathbf{S}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{S}_{\mathbf{wu}} \\ * & * & \mathbf{S}_{\mathbf{yu}} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{S}=-\mathbf{S}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{e}} \quad \begin{array}{ll} (i) & \text{Éléments stockants} \\ (ii) & \text{Éléments sans mémoire} \\ (iii) & \text{Ports} \end{array} \quad (1.1)$$

La figure 1.2 illustre cette architecture d'un système Hamiltonien à ports : 3 types de composants, dont les flux et efforts sont connectés par une structure de Dirac.

Avec une telle structure, le bilan de puissance est nécessairement respecté :

$$P_{st} + \underbrace{P_{diss}}_{\geq 0} + P_{ext} = 0, \quad \text{avec} \quad P_{st} = \frac{d}{dt} H(\mathbf{x}) (= \nabla H(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}}). \quad (1.2)$$

En effet, $P_{st} + P_{diss} + P_{ext} = \mathbf{e}^T \mathbf{f} = \mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ puisque $\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e} = (\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e})^T = \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{e} = -\mathbf{e}^T \mathbf{S} \mathbf{e}$ par antisymétrie de \mathbf{S} . La passivité vient du fait que la puissance stockée P_{st} est plus petite ou égale à celle donnée par l'environnement ($-P_{ext}$) d'après (1.2).

2. Voir section 1.3 pour les limites de cette représentation.

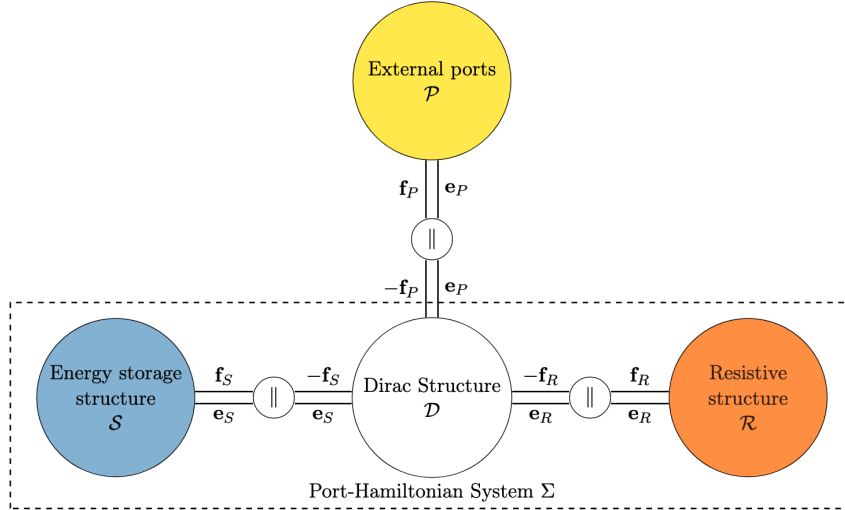


FIGURE 1.2 – Schéma d'un système Hamiltonien à ports (extrait de [17]).

TABLE 1.1 – Composants et lois du circuit RLC de la figure 1.1 pour des composants linéaires.

	Nom	États \mathbf{x}	Énergie $H(\mathbf{x})$	Flux \mathbf{f}	Effort \mathbf{e}
Composants stockants	Condensateur	$x_1 = q$	$H(\mathbf{x}) = \frac{q^2}{2C_0} + \frac{\varphi^2}{2L_0}$	$\dot{x}_1 = \dot{q} = i_C$	$\nabla_{x_1} H \mathbf{x} = \frac{q}{C} = v_C$
	Bobine	$x_2 = \varphi$		$\dot{x}_2 = \dot{\varphi} = v_L$	$\nabla_{x_2} H \mathbf{x} = \frac{\varphi}{L} = i_L$
Composants sans mémoire	Résistance			$w = v_R$	$z(w) = \frac{v_R}{R} = i_R$
Entrées/sorties	Générateur			$y = i_G$	$u = v_G$

1.1.2 Exemple de système Hamiltonien à ports

On cherche ici à mettre le circuit de la figure 1.1 sous forme de SHP. On commence par identifier les différents composants du circuit et les lois associées, comme résumé dans le tableau 1.1.

On exprime ensuite les lois reliant les composants entre eux, ici les lois de Kirchhoff :

- $i_R = i_C + i_L$ (loi des nœuds : $R \rightarrow (L//C)$),
- $v_L = v_C$ (maille condensateur – bobine),
- $v_R + v_C + v_G = 0$ (maille résistance – condensateur – générateur),³
- $i_G = i_R$ (loi des nœuds : $G \rightarrow R$).

On peut réécrire ces relations sous la forme d'une relation matricielle entre les flux et les efforts :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = i_C \\ \dot{x}_2 = v_L \\ w = v_R \\ y = i_G \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{S}=-\mathbf{S}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_{x_1} H(\mathbf{x}) = v_C \\ \nabla_{x_2} H(\mathbf{x}) = i_L \\ z(w) = i_R \\ u = v_G \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{e}} \quad \begin{array}{ll} (i) & R \rightarrow (L//C) \\ (ii) & \text{Maille } CL \\ (iii) & \text{Maille } RCG \\ (iv) & G \rightarrow R \end{array} \quad (1.3)$$

L'alliance des lois des composants résumées dans le tableau 1.1 et de la structure de Dirac – représentée par \mathbf{S} dans (1.3) – permet de décrire le circuit RLC par un système d'équation fermé, sous forme d'un SHP.

On peut alors vérifier que le bilan de puissance de ce dernier est bien respecté : comme prévu, le bilan de puissance du système peut s'écrire

$$\mathbf{e}^T \mathbf{f} = 0 \text{ avec } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} H'_1(x_1) = v_C \\ H'_2(x_2) = i_L \\ z(w) = i_R \\ u = v_G \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 = i_C \\ \dot{x}_2 = v_L \\ w = v_R \\ y = i_G \end{bmatrix}.$$

Cette relation entre les flux et les efforts est effectivement garantie par l'antisymétrie de \mathbf{S} .

3. On se place en convention récepteur pour tous les composants, y compris le générateur.

Dans la suite de ce chapitre, on donnera d'abord une définition formelle plus générale d'une structure de Dirac, à la manière de [17, 23]. Il s'agit de la notion centrale des systèmes Hamiltonien à ports. On présentera ensuite deux types de représentations des structures de Dirac : la représentation différentielle-algébrique semi-explicite en s'inspirant de [10], et les représentations noyau et image, en s'appuyant notamment sur [22, 23, 3].

1.2 Structure de Dirac

Définitions préliminaires Les systèmes physiques interconnectés interagissent en échangeant de la puissance. On définit ici des espaces de flux (courant d'un condensateur C , vitesse d'allongement d'un ressort, etc), d'efforts associés (tensions, forces, etc) et de puissance pour formaliser les échanges de puissance au sein de ces systèmes et entre différents systèmes.

Définition 1.2.1 (espaces de flux et d'effort). Soit \mathcal{F} un espace vectoriel (l'espace des flux). Son espace dual est l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ des formes linéaires $e : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ (l'espace des efforts).

Une fois la notion d'espaces duaux de flux et d'effort définie, on peut définir la puissance de la manière suivante :

Définition 1.2.2 (puissance). Notons $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{F}^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ le produit dual entre \mathcal{F} et $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$. L'espace produit $\mathcal{B} := \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est appelé l'espace des interconnexions ou des variables conjuguées de puissance (« bond space » en anglais, dénomination qu'on utilisera par la suite), avec la puissance $P := \langle e | f \rangle = e(f)$.

Cette puissance est liée à la forme quadratique sur \mathcal{B} :

$$\forall (f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}, Q((f, e)) := 2\langle e | f \rangle. \quad (1.4)$$

Notations Selon que $(f, e) \in \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est considéré comme une paire d'éléments de \mathbb{R}^n (pour \mathcal{F} et \mathcal{E}) ou d'espaces duaux \mathcal{F} et $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$, on trouve dans la littérature les écritures suivantes (chacune avec leur intérêt) :

- $P = \langle f, e \rangle = e^T f = f^T e$ (produit scalaire dans \mathbb{R}^n) qui simplifie les calculs (matriciel)
- $P = \langle e | f \rangle = e(f)$ (forme linéaire $e \in \mathcal{F}^*$ appliquée au flux f) qui permet de mettre en valeur les opérateurs et espaces des signaux

Afin de faire la distinction entre ces deux cas, dans ce document, on note $(f, e) \in \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$, et $(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Remarque. Selon le contexte, il pourra être plus intéressant de travailler avec des représentations *intrinsèques* $((f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E})$ ou *en coordonnées* $((\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ces deux points de vue sont équivalents en dimension finie.

En effet, si l'espace vectoriel \mathcal{F} est de dimension finie, on peut considérer une base $\{f_k\}$ et sa base duale $\{e_k\} = \{f_k^*\}$. En utilisant les coordonnées \mathbf{f} et \mathbf{e} de f et e dans ces bases, on a pareillement $P = \langle e | f \rangle = \mathbf{e}^T \mathbf{f}$.

Définition 1.2.3 (forme bilinéaire canonique). L'espace produit $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est équipé d'une forme bilinéaire symétrique canoniquement définie $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ induite par la forme quadratique Q :

$$\langle\langle (f_1, e_1), (f_2, e_2) \rangle\rangle := \langle e_1 | f_2 \rangle + \langle e_2 | f_1 \rangle. \quad (1.5)$$

Cette forme bilinéaire est non définie⁴ (elle n'est pas un produit scalaire), mais non dégénérée⁵. Elle confère à \mathcal{B} la structure d'un espace pseudo-euclidien (ou espace de Krein) équipé de $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{B}} := \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ⁶.

Définition 1.2.4 (complément orthogonal). Considérons un sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$. Son complément orthogonal \mathcal{D}^{\perp} par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ est défini par

$$\mathcal{D}^{\perp} := \{u = (f_u, e_u) \in \mathcal{B} \mid \langle u, v \rangle_{\mathcal{B}} = 0, \forall v = (f_v, e_v) \in \mathcal{D}\}. \quad (1.6)$$

4. c'est-à-dire que sa matrice métrique a à la fois des valeurs propres positives et négatives (voir section 1.4.2 p.36 de [17]).

5. en dimension finie, cela équivaut à $\text{rg}(\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) = \dim \mathcal{B} = 2n$, (c'est-à-dire que la métrique est inversible).

6. On utilisera les deux notations $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ et $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$

Structure de Dirac Ces définitions étaient nécessaires pour pouvoir définir la notion de structure de Dirac, élément central des SHP, qui garantit le bilan de puissance du système : la puissance totale (somme des puissances interne et externe) doit être nulle. On définit d'abord ici la structure de Dirac, avant de vérifier cette propriété fondamentale dans le [Corollaire 1.2.1](#) et la [Proposition 1.2.1](#).

Définition 1.2.5 (structure de Dirac). Un sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ est une *structure de Dirac*⁷ (constante) si elle est auto-orthogonale par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\perp}. \quad (1.7)$$

En dimension finie, cette relation implique directement que $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E}$.

Corollaire 1.2.1. Soit $(f, e) \in \mathcal{D} = \mathcal{D}^{\perp} \subset \mathcal{B}$, alors à partir de l'équation (1.6) et de l'équation (1.7), une structure de Dirac définit une relation de conservation de puissance entre les variables (f, e) , c'est-à-dire

$$\langle \langle (f, e), (f, e) \rangle \rangle = 2\langle e | f \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Proposition 1.2.1. Un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ de dimension finie est une structure de Dirac si et seulement si \mathcal{D} est un sous-espace de \mathcal{B} de dimension maximale, vérifiant $\langle e | f \rangle = 0$ pour tout $(f, e) \in \mathcal{D}$. En particulier, tout sous-espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ satisfaisant $\langle e | f \rangle = 0$ est une structure de Dirac si et seulement si $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F}$.

Dans le reste de ce chapitre, on se limitera au cas de structures de Dirac de dimension finie. Comme expliqué dans une remarque ci-dessus, on pourra alors considérer sans ambiguïté et de façon équivalente des expressions :

1. (*intrinsèque*) utilisant des applications linéaires $(\mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \dots)$, et des objets $(\mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{e})$ appartenant aux espaces vectoriels \mathcal{F}, \mathcal{E} (on introduira aussi \mathcal{V} pour les représentations noyau et image).
2. (*en coordonnées*) utilisant des matrices $(\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \dots)$ et des vecteurs $(\mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ de \mathbb{R}^n . Ces matrices (resp. vecteurs) seront les représentations des applications linéaires (resp. vecteurs) dans des bases données $(\mathbb{B}_{\mathcal{F}}, \mathbb{B}_{\mathcal{V}}, \dots)$. Pour les espaces duaux $(\mathcal{E} = \mathcal{F}^*, \mathcal{V}^*, \dots)$, on utilisera les bases duales $(\mathbb{B}_{\mathcal{F}}^*, \mathbb{B}_{\mathcal{V}}^*, \dots)$.

Remarque. La forme bilinéaire définie sous forme (*intrinsèque*) en [Définition 1.2.3](#), peut être réécrite (*en coordonnées*) comme ci-dessous.

Soient $\mathbf{u} = (f_u, e_u), \mathbf{v} = (f_v, e_v) \in \mathcal{B}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{e}_u \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{e}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, leurs représentations matricielles, on a :

$$\langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{B}} = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{B}} &= \langle \langle (f_u, e_u), (f_v, e_v) \rangle \rangle = \langle e_u | f_v \rangle + \langle e_v | f_u \rangle = \mathbf{e}_u^T \mathbf{f}_v + \mathbf{e}_v^T \mathbf{f}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u^T & \mathbf{e}_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_v \\ \mathbf{f}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{e}_u \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{e}_v \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

1.3 Formulation différentielle-algébrique semi-explicite

Proposition 1.3.1. Toute structure de Dirac de dimension finie \mathcal{D} peut être définie par une matrice antisymétrique \mathbf{S} telle que

$$\mathcal{D} = \left\{ (f, e) \in \mathcal{B} \left| \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \right. \right\}. \quad (1.10)$$

Cas sans contraintes Le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange qui permet d'écrire des contraintes entre les efforts, et qui ne travaillent pas ($\mathbf{0}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$). Avec cette formulation, ces contraintes obligent à augmenter la dimension du système.

En particulier, le circuit RLC série présenté plus tôt ne contient pas de telles contraintes, et s'écrit sans $\boldsymbol{\lambda}$ dans (1.3). La mise en forme d'un circuit RLC sous la forme d'un SHP (1.3) est un cas particulier de (1.10) sans contrainte (sans $\boldsymbol{\lambda}$).

⁷ Selon la définition de [22], qui est celle employée dans ce rapport. Il existe cependant une définition plus restrictive, voir [21].

Représentation semi-explicite La représentation (1.10) est dite semi-explicite car les flux sont exprimés comme une combinaison linéaire des efforts. Dans un système contenant uniquement des composants stockants, on a directement une expression de $\dot{\mathbf{x}}$ en fonction de \mathbf{x} ⁸.

Schéma numérique implicite

Comme dit précédemment la forme présentée dans l'équation (1.1) est semi-explicite. Cependant, lors de la résolution numérique du système et de sa discrétisation, les méthodes utilisées (gradient discret [10] ou méthode RPM [17]) mèneront à un schéma numérique implicite, de la forme $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n)$.⁹

Il peut alors être acceptable d'utiliser une formulation implicite avant même l'étape de discrétisation. Aussi, ci-dessous, on s'autorise d'avoir une description implicite dès la formulation initiale du problème, permettant d'exprimer des contraintes sans multiplicateur de Lagrange.

1.4 Formulations implicites

1.4.1 Motivations

Le fait que la discrétisation engendre un schéma numérique implicite dans de nombreux cas n'est pas le seul argument pour utiliser une formulation implicite. En effet, des formulations implicites apparaissent naturellement lors de la connexion de certains systèmes physiques : c'est par exemple le cas lorsqu'on assemble 2 masses, et c'est aussi le cas du modèle d'appareil vocal de [24], voir section 3.1. C'est une des raisons principales qui motive notre intérêt pour ces formulations.

Ces représentations permettent également d'exprimer des contraintes sans augmenter la dimension du système. Enfin, les formulations implicites peuvent impliquer des matrices creuses, propriété qu'on pourrait chercher à exploiter dans les solveurs.

Il existe différentes représentations implicites, et on choisit de présenter les représentations noyaux, image, utilisées principalement durant ce stage et la représentation hybride, équivalente et utile pour certaines preuves sur la méthode numérique. D'autres existent cependant, comme la représentation « descripteurs » (en anglais port-Hamiltonian descriptor systems ou pHDAE pour port-Hamiltonian differential-algebraic equations) [15] qui présente des avantages similaires.

8. Ce n'est pas le cas pour les flux dissipatifs \mathbf{w} d'où le terme *semi-explicite*

9. En cas de Hamiltonien quadratique le schéma numérique reste explicite pour la méthode du gradient discret. Cependant ce n'est pas le cas si on considère des composants non linéaires.

1.4.2 Représentations noyau et image

Proposition 1.4.1 (représentations noyau et image [22]).

En coordonnées Une structure de Dirac \mathcal{D} de dimension finie peut être représentée par des matrices \mathbf{E} et \mathbf{F} de taille $n \times n$ ¹⁰ telles que :

- en représentation noyau

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mid \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{E}\mathbf{e} = 0 \right\} \stackrel{11}{=} \ker \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

- en représentation image

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mid \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T \\ \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n \right\} \\ = \text{im} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T \\ \mathbf{F}^T \end{bmatrix},$$

avec des matrices \mathbf{E} et \mathbf{F} vérifiant

- (i) $\mathbf{E}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{E}^T = 0$,
- (ii) $\text{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = n$.

Intrinsèque Une structure de Dirac \mathcal{D} peut être représentée par des applications linéaires \mathbf{E} et \mathbf{F} tels que :

- en représentation noyau

$$\mathcal{D} = \{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{B} \mid \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{E}\mathbf{e} = 0 \}, \quad (1.12)$$

- en représentation image

$$\mathcal{D} = \{ (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{B} \mid \mathbf{f} = \mathbf{E}^* \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{e} = \mathbf{F}^* \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{V}^* \},$$

avec $\mathbf{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{V})$, $\mathbf{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ et leurs adjoints au sens du produit dual¹² $\mathbf{E}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$ et $\mathbf{F}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{F}^*)$ vérifiant

- (i) $\mathbf{F} \circ \mathbf{E}^* + \mathbf{E} \circ \mathbf{F}^* = 0$,
- (ii) $\text{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = n$.¹³

Preuve : voir p143 de [23] pour une preuve succincte *en coordonnées*, ou annexe A.2 pour une preuve plus détaillée réalisée pendant ce stage, sous forme *intrinsèque*.

Remarque. En coordonnées

En posant $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$, on peut réécrire cette définition :

- en représentation noyau :

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{B}\mathbf{b} = 0_n \} = \ker \mathbf{B},$$

- en représentation image :

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n \} \\ = \text{im} \mathbf{M}\mathbf{B}^T,$$

avec \mathbf{B} vérifiant

- (i) $\mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{B}^T = 0_{n \times n}$,
- (ii) $\text{rg} \mathbf{B} = n$.

Intrinsèque

Soit $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ définie par

$$\mathbf{B}: \mathcal{F} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{e}) + \mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{E}\mathbf{e} + \mathbf{F}\mathbf{f}.$$

La définition précédente se réécrit alors :

- en représentation noyau :

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{B}\mathbf{b} = 0_{\mathcal{V}} \} = \ker \mathbf{B},$$

- en représentation image :

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{b} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{b} = \mathbf{B}^* \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{V}^* \} = \text{im} \mathbf{B}^*,$$

avec \mathbf{B} vérifiant

- (i) $\mathbf{B}\mathbf{B}^* = 0_{\mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}}$,
- (ii) $\text{rg} \mathbf{B} = n$.

Cet opérateur \mathbf{B} , introduit dans ce stage, permet de comprendre l'appellation représentation noyau/image. Il est notamment utile pour prouver l'équivalence entre les deux représentations (voir section A.2). Plutôt que de travailler sur l'espace des flux \mathcal{F} et des efforts \mathcal{E} séparément, on travaille directement sur l'espace des bonds \mathcal{B} .

Définition 1.4.1 (Adjoints de ces opérateurs linéaires). Soient $\mathbf{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{V})$, $\mathbf{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ des opérateurs linéaires, avec \mathcal{V} un espace vectoriel ($\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{F} = n$ ¹⁴). Soit $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ l'application linéaire allant de $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ vers \mathcal{V} définie par

$$\mathbf{B}: \mathcal{F} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{e}) + \mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{E}\mathbf{e} + \mathbf{F}\mathbf{f}.$$

10. On peut également choisir des matrices de taille $m \times n$ avec $m \geq n$. On parle alors de représentations noyau et image relâchées (« *relaxed kernel representation* » en anglais).

12. voir Définition 1.4.1

14. On peut également choisir \mathcal{V} de dimension $m \geq n$. On parle alors de représentations noyau et image relâchées (« *relaxed kernel representation* » en anglais).

Les applications adjointes de \mathbf{E} et \mathbf{F} sont notées respectivement $\mathbf{E}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$ et $\mathbf{F}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{F}^*)$, telles que

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in \mathcal{V}^*, \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}, \quad \langle \mathbf{E}^* \Phi | \mathbf{e} \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle \Phi | \mathbf{E} \mathbf{e} \rangle_{\mathcal{V}}, \\ \forall \Phi \in \mathcal{V}^*, \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \langle \mathbf{F}^* \Phi | \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{F}} &= \langle \Phi | \mathbf{F} \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En dimension finie, il existe un isomorphisme \tilde{i} entre $\mathcal{E}^* = \mathcal{F}^{**}$ et \mathcal{F} .¹⁵ Nous pouvons donc identifier \mathcal{F} et son bidual \mathcal{F}^{**} , et récapituler les applications linéaires dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Flux} & \\ \mathcal{E}^* = (\mathcal{F}^*)^* \cong \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{V} \\ & \swarrow \mathbf{E}^* & \uparrow \mathbf{E} \\ & \mathcal{V}^* & \xrightarrow{\mathbf{F}^*} & \mathcal{F}^* = \mathcal{E} \\ & & \text{Efforts} & \end{array} \quad (1.14)$$

L'application adjointe de \mathbf{B} est notée $\mathbf{B}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{B})$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathcal{V}^*, \forall (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}, \quad \langle \langle \mathbf{B}^* \lambda, (\mathbf{f}, \mathbf{e}) \rangle \rangle = \langle \lambda | \mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \rangle_{\mathcal{V}}. \quad (1.15)$$

La preuve de l'existence et de l'unicité d'un tel adjoint est détaillée en annexe A.1. On montre ensuite aisément par unicité de l'adjoint que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* : \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{E} \\ \lambda &\mapsto (\mathbf{E}^* \lambda, \mathbf{F}^* \lambda). \end{aligned}$$

La preuve que les représentations noyau et image sont équivalentes et qu'elles définissent une structure de Dirac en dimension finie est située en annexe A.2.

1.4.3 Représentation hybride

Proposition 1.4.2 (représentation hybride). *Soit \mathcal{D} une structure de Dirac de dimension finie, définie par (1.11). Supposons $\text{rg } \mathbf{F} = n_1 \leq n$. Sélectionnons n_1 colonnes indépendantes de \mathbf{F} , et rassemblons les dans une matrice $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$. Écrivons (après d'éventuelles permutations) $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 | \mathbf{F}_2]$, et $\mathbf{E} = [\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2]$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$ (après les mêmes éventuelles permutations). Alors la matrice $[\mathbf{F}_1 | \mathbf{E}_2]$ est inversible.*

De plus,

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.16)$$

avec $\mathbf{J} = -[\mathbf{F}_1 | \mathbf{E}_2]^{-1} [\mathbf{F}_2 | \mathbf{E}_1] = -\mathbf{J}^T$.

Réciproquement, pour toute matrice antisymétrique \mathbf{J} , le sous-espace \mathcal{D} défini par (1.16) est une structure de Dirac de dimension finie.

1.5 Notations

Composants stockants, sans mémoire et ports d'interaction Comme expliqué dans la section 1.1, un SHP est décrit par une structure de Dirac, et des lois pour chaque composant du système, avec trois types de composants (stockant de l'énergie, sans mémoire et ports d'interaction avec l'environnement). La structure de Dirac ne sépare pas ces types de composants : elle définit simplement les interconnexions entre composants, indépendamment de leurs types. Le SHP complet inclut aussi les lois des composants, et doit donc distinguer les trois types de composants.

15. Ceci est toujours vrai en dimension finie, mais toujours faux en dimension infinie d'après le théorème d'Erdős-Kaplansky [7, 2].

On décompose dans ce but les espaces des flux et des efforts en trois sous-espaces chacun, un pour chaque type de composant du système :

- \mathcal{F}_x et \mathcal{E}_x pour les composants stockant de l'énergie,
- \mathcal{F}_w et \mathcal{E}_w pour les composants sans mémoire,
- \mathcal{F}_y et \mathcal{E}_u pour les ports d'interaction,

avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_w \times \mathcal{F}_y$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_w \times \mathcal{E}_u$.

Par la suite, on utilisera cette notation pour les composantes des vecteurs des flux et des efforts, $\mathbf{f} = (f_x, f_w, f_y) \in \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_w \times \mathcal{F}_y$ et $\mathbf{e} = (e_x, e_w, e_u) \in \mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_w \times \mathcal{E}_u$. De même pour les trajectoires au cours du temps des flux $t \mapsto \tilde{\mathbf{f}}(t) = (\tilde{f}_x(t), \tilde{f}_w(t), \tilde{f}_y(t))$ et des efforts $t \mapsto \tilde{\mathbf{e}}(t) = (\tilde{e}_x(t), \tilde{e}_w(t), \tilde{e}_y(t))$.

Chapitre 2

Méthode de projection temporelle PM

2.1 Motivations

En chapitre 1, on a décrit un SHP en représentation noyau, sous forme d'équations différentielles ordinaires implicites, reliant les flux $f(t) \in \mathcal{F} \sim \mathbb{R}^n$, les efforts $e(t) \in \mathcal{E} \sim \mathbb{R}^n$ et états $x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^{n_x}$, pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$.

Dans ce chapitre, on cherche à développer une méthode numérique dont l'ordre de précision est réglable, et qui respecte le bilan de puissance du système. Pour ce faire, on s'inspire de la méthode de projection temporelle par trames $\Omega_n = (nh, (n+1)h)$ présentée dans la thèse de Rémy Müller [17, Chapitre 5], nommée RPM (en anglais « regular power balanced method »).

Pour des raisons de clarté et pour une trame donnée Ω , on marquera les objets exacts (fonctions, opérateurs, etc) que nous utiliserons par un tilde ($\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}} \subseteq L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}} \subseteq L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\tilde{x} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^{n_x})$, etc), et leurs versions approchées par la méthode numérique par un chapeau ($\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}} \subseteq L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\hat{e} \in \hat{\mathcal{E}} \subseteq \tilde{\mathcal{E}} \subseteq L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\hat{x} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^{n_x})$, etc).

Puisque l'on s'intéresse à des systèmes avec contraintes, on cherche à adapter cette méthode à la représentation noyau des SHP, qui apparaît naturellement dans de tels cas. On ne traitera pas ici la partie régularisation des trajectoires, et on parle donc de méthode PM noyau.

La section 2.2 décrit la démarche générale de construction de cette méthode numérique, et prouve qu'elle préserve le bilan de puissance du système (voir [Corollaire 2.2.1](#)). La section 2.3 résume ensuite la méthode et son implémentation à travers un exemple concret. Enfin, la méthode est appliquée à un circuit électrique LLC dans la section 2.4.

2.2 Description de la méthode

La méthode comprend deux étapes principales : passage d'un SHP ponctuel (tel que décrit dans le chapitre précédent) à une formulation par trame, puis création du SHP projeté. Le [tableau 2.1](#) résume ces différents SHP, les notations et les objets qui y correspondent.

Elle cherche à approximer les trajectoires des flux et des efforts, qui sont des fonctions de \mathbb{R} vers un espace de dimension n . Cet espace de fonctions étant de dimension infinie, on procède à différentes étapes pour se ramener à un problème de dimension finie. L'idée clé est de projeter les trajectoires des flux et des efforts dans un espace approprié.

Après ces deux étapes, on obtient un système de np équations à np inconnues¹. On peut alors résoudre ce système pour obtenir une approximation des trajectoires des flux et des efforts trame par trame.

Dans cette section, \mathcal{V} et \mathcal{F} sont des espaces vectoriels de dimension finie n (l'espace des flux), et $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ est l'espace dual de \mathcal{F} (l'espace des efforts). On pourra librement choisir une base de \mathcal{F} , et prendre sa base duale comme base de \mathcal{E} afin de pouvoir construire une norme. Si $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées du vecteur $e \in \mathcal{E}$ dans cette base, on pose $\|e\|_{\mathcal{E}} = \|\underline{e}\|_2$. Il en va de même pour \mathcal{F} et \mathcal{V} .

1. voir [\(2.21\)](#) et section 2.4 pour un exemple concret

TABLE 2.1 – Récapitulatif de la méthode PM noyau

Tag	Structure de Dirac	Lois des composants		Notes
		Flux	Efforts	
SHP à temps ponctuel	$\mathbf{F}[\mathbf{f}(t)] + \mathbf{E}[\mathbf{e}(t)] = 0_n$	$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \nabla H \mathbf{x}(t) \\ z(\mathbf{w}(t)) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Temps</i> : ponctuel 2. <i>Variables</i> : vecteurs $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{e}(t)$ 3. <i>Opérateurs</i> : matrices \mathbf{E}, \mathbf{F}
Trame $\tilde{\cdot}$	$\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{e}} = 0_{\tilde{\mathcal{V}}}$	$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{F}}$	$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \nabla H \circ \mathbf{x} \\ z \circ \tilde{\mathbf{w}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{E}}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Temps</i> : trame 2. <i>Variables</i> : fonctions $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ 3. <i>Opérateurs</i> : applications linéaires $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$
SHP projeté $\hat{\cdot}$	$\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{f}} + \hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{e}} = 0_{\hat{\mathcal{V}}}$	$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{F}}$	$\hat{\mathbf{e}} = \mathcal{P}^* \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \hat{\mathcal{E}},$ avec $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \xi(\hat{\mathbf{f}})$ et $\xi = \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_w \\ \xi_u \end{bmatrix}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Temps</i> : trame 2. <i>Variables</i> : fonctions projetées $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{e}}$ 3. <i>Opérateurs</i> : applications linéaires $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ 4. ξ : opérateur (agissant sur des fonctions temporelles), décrivant des versions approchées des lois des composants.

2.2.1 Formulation par trames

a) Écriture du SHP par trames et bilan de puissance

Trajectoires Dans le chapitre précédent, on considérait un SHP à un temps t ponctuel (voir [tableau 2.1](#)). Les flux et les efforts étaient des vecteurs d'un espace de dimension n à chaque instant $t \in \mathbb{R}_+$. Pour cette méthode numérique, il faut changer de point de vue, et ne plus considérer les flux et les efforts à un instant donné, mais comme des fonctions du temps, appelées trajectoires :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{F} & \mathbf{e} : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{E} \\ t &\mapsto \mathbf{f}(t) & t &\mapsto \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

On cherche donc non plus à approcher pour chaque instant t les vecteurs $\mathbf{f}(t)$ et $\mathbf{e}(t)$, mais bien à approcher les trajectoires \mathbf{f} et \mathbf{e} sur l'intervalle de simulation $[0, T]$.

Trames La première étape de la méthode est de découper cet intervalle en trames temporelles de longueur h , pour approcher les trajectoires sur chaque trame. Quitte à normaliser le temps² $t \mapsto \frac{t-t_0}{h}$, on considère ici des trames de longueur $h = 1$, et on note $\Omega = [0, 1]$ l'intervalle de temps. Par la suite, le terme trajectoire désignera la trajectoire *sur une trame* Ω , c'est-à-dire une fonction de Ω vers un espace de dimension n .

On considère les trajectoires

- de flux $t \in \Omega \mapsto \tilde{\mathbf{f}}(t)$ dans $\tilde{\mathcal{F}} = L^2(\Omega, \mathcal{F}) \simeq \tilde{\mathcal{F}}_x \times \tilde{\mathcal{F}}_w \times \tilde{\mathcal{F}}_u$
- d'efforts $t \in \Omega \mapsto \tilde{\mathbf{e}}(t)$ dans $\tilde{\mathcal{E}} = L^2(\Omega, \mathcal{E}) \sim \tilde{\mathcal{F}}^* \sim \tilde{\mathcal{F}}$

de sorte que $\tilde{\mathcal{X}}_{x_0} := [\tilde{\mathbf{x}} | \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \in \tilde{\mathcal{F}}_x, \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}] \subset H^1(\Omega, \mathcal{X})$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ fixé. Dans tout ce chapitre, on utilisera \mathbf{x}_0 comme état initial au début de la trame, et on notera $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_{x_0}$.

Ces flux et efforts "suivent" un SHP en représentation noyau, dont la structure de Dirac est définie par des opérateurs linéaires \mathbf{F} et \mathbf{E} .

2. Sans perte de généralité, quitte à remplacer le temps adimensionné $\tau \in [0, 1]$ par $t = t_0 + h\tau \in [t_0, t_0 + h]$ et $\frac{1}{h}d\tau = \frac{1}{h} \frac{d}{d\tau}$ par $\frac{d}{dt}$

Remarque. On peut identifier sans ambiguïté $\tilde{\mathcal{E}} = L^2(\Omega, \mathcal{E})$ et $\tilde{\mathcal{F}}^*$, et on notera l'énergie totale reçue par le système durant l'intervalle de temps Ω :

$$\langle \tilde{\mathbf{e}} | \tilde{\mathbf{f}} \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}} := \int_0^1 \langle \tilde{\mathbf{e}}(\tau) | \tilde{\mathbf{f}}(\tau) \rangle d\tau$$

On définit un SHP en temps continu par les opérateurs suivants :

$$\tilde{\mathbf{F}}: \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{V}} \\ (\tau \mapsto \mathbf{f}(\tau)) & \longmapsto & (\tau \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{f}(\tau))), \end{array} \quad \tilde{\mathbf{E}}: \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{V}} \\ (\tau \mapsto \mathbf{e}(\tau)) & \longmapsto & (\tau \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{e}(\tau))). \end{array}$$

La version continue de la structure de Dirac $\mathcal{D} = \{(\mathbf{f}, \mathbf{e}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} | \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{E}\mathbf{e} = 0\}$ est

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{e}}) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{E}} | \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{e}} = 0\}.$$

Et le SHP en temps continu (lois et structure de Dirac) est

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{f}}) + \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{e}}) = 0_{\tilde{\mathcal{V}}}, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \tilde{\mathbf{w}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix} \quad \text{et } \tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \circ \tilde{\mathbf{x}} \\ z(\tilde{\mathbf{w}}) \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Ce SHP en temps continu (2.1) est une équation sur les trajectoires des flux et des efforts.

Bilan de puissance Si l'on dispose de trajectoires solutions du système continu $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$, alors pour tout temps $\tau \in \Omega$, on a $\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{f}}(\tau) + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{e}}(\tau) = 0$, donc $(\tilde{\mathbf{f}}(\tau), \tilde{\mathbf{e}}(\tau)) \in \tilde{\mathcal{D}}$. Par conséquent, on a le respect du bilan de puissance au sens fort :

$$\forall \tau \in \Omega, P(\tau) = \langle \tilde{\mathbf{e}}(\tau) | \tilde{\mathbf{f}}(\tau) \rangle = 0.$$

Donc le bilan d'énergie est satisfait à l'échelle de la trame.

$$\langle \tilde{\mathbf{e}} | \tilde{\mathbf{f}} \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}} = \int_0^1 \underbrace{\langle \tilde{\mathbf{e}}(\tau) | \tilde{\mathbf{f}}(\tau) \rangle}_{=0} d\tau = 0 \quad (2.2)$$

De même, si l'on dispose de solutions exactes du systèmes continu, la contrainte de passivité est respectée pour tout temps $\tau \in \Omega$: $\tilde{\mathbf{e}}_w(\tau) = z(\tilde{\mathbf{f}}_w(\tau)) \geq 0$, avec $\tilde{\mathbf{f}}_w = \tilde{\mathbf{w}}$. La passivité à l'échelle de la trame est donc respectée :

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_w | \tilde{\mathbf{f}}_w \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}_w} = \int_0^1 \underbrace{\langle \tilde{\mathbf{e}}_w(\tau) | \tilde{\mathbf{f}}_w(\tau) \rangle}_{\geq 0} d\tau \geq 0 \quad (2.3)$$

Cette première étape (a) a permis d'exprimer le SHP en temps continu (2.1). Pour approcher les trajectoires solution de ce SHP en temps continu, il est nécessaire de définir un opérateur explicitant le lien entre la trajectoire des flux et celle des efforts.

b) Reconstruction des efforts

Cette sous-section introduit l'opérateur ξ de reconstruction de trajectoires de efforts $\tilde{\mathbf{e}}$ à partir de celles des flux (ainsi que l'état initial \mathbf{x}_0 et la trajectoire des entrées).

1. **Composants stockants de l'énergie** : On reconstruit d'abord la trajectoire des états $\tilde{\mathbf{x}}$ à partir de $\tilde{\mathbf{f}}_x$. Pour expliciter ce processus, on définit

$$X: \tilde{\mathbf{f}}_x \in \tilde{\mathcal{F}}_x \mapsto \left(\tau \in \Omega \mapsto \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \tilde{\mathbf{f}}_x(\sigma) d\sigma \right) \in \tilde{\mathcal{X}}$$

et on a alors $\tilde{\mathbf{x}} = X(\tilde{\mathbf{f}}_x)$, qu'on renote $X\tilde{\mathbf{f}}_x$. On peut ensuite définir

$$\xi_x: \tilde{\mathbf{f}}_x \in \tilde{\mathcal{F}}_x \mapsto \nabla H \circ X\tilde{\mathbf{f}}_x,$$

pour obtenir $\tilde{\mathbf{e}}_x = \xi_x \tilde{\mathbf{f}}_x$.

2. **Composants sans mémoire** : De même, pour les composants sans mémoire, on introduit

$$\xi_w : \tilde{f}_w \in \tilde{\mathcal{F}}_w \mapsto z \circ \tilde{f}_w,$$

pour obtenir $\tilde{e}_w = \xi_w \tilde{f}_w$.

3. **Entrées** : La dernière composante des efforts est simplement constituée des entrées du système : $\tilde{e}_u = \tilde{u}$

Le regroupement de ces trois types d'efforts est donné par l'opérateur global :

$$\tilde{e} = \xi(\tilde{f}, \tilde{u}) := (\xi_x \tilde{f}_x, \xi_w \tilde{f}_w, \tilde{u}),$$

qui permet de bien spécifier que l'on construit \tilde{e} à partir de \tilde{f} et \tilde{u} .

Notons que ξ dépend de \mathbf{x}_0 . À \mathbf{x}_0 donné, l'opérateur ξ construit la trajectoire des efforts solution du SHP en temps continu (2.1) lorsqu'on le nourrit par la trajectoire de flux solution \tilde{f} et la trajectoire d'entrée \tilde{u} . Par conséquent, on peut réécrire (2.1) pour mettre en avant l'inconnue : la trajectoire des flux.

$$\tilde{F}(\tilde{f}) + \tilde{E}(\xi(\tilde{f})) = 0_{\tilde{\mathcal{V}}} \quad (2.4)$$

L'opérateur ξ permet de résumer en une seule équation la structure de Dirac et les lois des composants. Dans la suite de ce chapitre, cet opérateur sera exploité en le nourrissant par une trajectoire de flux approchée sur la trame. Il s'agira alors de l'utiliser pour préserver le bilan de puissance (et la passivité) et maîtriser la précision des schémas.

2.2.2 Projection temporelle

Vers un SHP projeté

Projection des flux On supposera ici que $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ ³. On peut alors identifier son dual \mathcal{E} à \mathbb{R}^n .

Les inconnues de (2.4) (la trajectoire des flux) sont à chercher dans un espace de dimension infinie $\tilde{\mathcal{F}}$. On veut réduire cet espace de recherche à un sous-espace de dimension finie (en minimisant une erreur commise).

Pour construire ce sous-espace de $\tilde{\mathcal{F}} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on choisit une base \mathbb{B}_n de p fonctions de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, définissant un espace $\hat{\mathcal{F}} := \text{span } \mathbb{B}_n$, aussi noté $\hat{\mathcal{E}} := \text{span } \mathbb{B}_n$ pour continuer de distinguer les espaces des trajectoires des flux et des efforts. On définit alors \mathcal{P} le projecteur orthogonal sur $\hat{\mathcal{F}}$, et \mathcal{P}^* son adjoint pour le produit dual $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}}$.

Remarque. Le plus souvent, et dans tous les cas d'applications de ce stage, on choisira en réalité une base \mathbb{B} de p fonctions de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ pour générer la base vectorielle \mathbb{B}_n des flux et efforts. Soit $\mathcal{S} = \text{span } \mathbb{B}$ et \mathcal{P} le projecteur orthogonal dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ associé. Alors le projecteur vectoriel est défini par $\mathcal{P} = \mathcal{P} \otimes \mathbf{I}_n$.

Espace des trajectoires des efforts La fonction ξ qui permet de construire la trajectoire des efforts implique des intégrations (construction de l'état des composants stockants), et des fonctions qui peuvent être non linéaires (∇H pour les composants stockants, z pour les composants sans mémoire). Les efforts ainsi reconstruits $\hat{e} := \xi(\hat{f}, \hat{u})$ ne sont donc a priori pas dans $\hat{\mathcal{E}} = \text{span } \mathbb{B}_n = \hat{\mathcal{F}}$. Par conséquent, l'équation (2.5) n'a en général pas de solution.

$$\tilde{F}(\hat{f}) + \tilde{E}(\xi(\hat{f})) = 0_{\tilde{\mathcal{V}}} \quad (2.5)$$

Pour traiter cette difficulté, on propose de projeter également $\hat{e} = \xi(\hat{f}, \hat{u})$ sur $\hat{\mathcal{E}}$ à l'aide du projecteur \mathcal{P}^* . Pour se rapprocher d'une structure de Dirac en représentation noyau, on projette aussi $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{\mathcal{F}}$ à l'aide du projecteur \mathcal{P} ⁴.

Remarque. Puisque \mathcal{P} est un projecteur orthogonal, il est auto-adjoint, c'est-à-dire $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ ⁵. De plus, \mathcal{P} est un projecteur, donc par définition il est idempotent : $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$.

3. sans perte de généralité, cela revient à travailler en coordonnées

4. $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \hat{f} = \mathcal{P}(\hat{f})$

5. Il est nécessaire d'identifier $\hat{\mathcal{E}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$, puisque $\mathcal{P} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ alors que $\mathcal{P}^* : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$.

Projection des efforts On obtient alors le système d'équations projeté :

$$\tilde{F} \circ \mathcal{P}(\hat{\mathbf{f}}) + \tilde{E} \circ \mathcal{P}^*(\hat{\mathbf{e}}) = 0_{\tilde{\mathcal{Y}}}, \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} X(\hat{\mathbf{f}}_x) = \hat{\mathbf{f}}_x \\ \hat{\mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} \nabla H \circ X(\hat{\mathbf{f}}_x) \\ z(\hat{\mathbf{w}}) \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{e}} = \mathcal{P}^*(\hat{\mathbf{e}}). \quad (2.6)$$

L'image des applications linéaires $\tilde{F} \circ \mathcal{P}$ et $\tilde{E} \circ \mathcal{P}^*$ est de dimension finie, donc ce système d'équation est de dimension finie, et l'espace de recherche des inconnues $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ est également de dimension finie. On peut donc résoudre ce SHP projeté. Il reste maintenant à étudier les propriétés de ses solutions.

Propriétés du SHP projeté

Proposition 2.2.1 (Bilan énergétique du SHP projeté). *Soient $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ solution d'un SHP projeté (2.6) pour une entrée $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{e}} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) \in \hat{\mathcal{E}}$ la trajectoire des efforts reconstruite (non projetée).*

On note $\hat{\mathbf{f}}_x$ la trajectoire des flux des composants stockants, et on pose $\hat{\mathbf{x}} = X\hat{\mathbf{f}}_x$ la trajectoire des états reconstruits (pour un état initial \mathbf{x}_0 fixé). La trajectoire des efforts de ces composants (non projetée) est notée $\hat{\mathbf{e}}_x = \xi_x(\hat{\mathbf{f}}_x) = \nabla H \circ \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{E}}_x$.

Alors, le produit dual $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}}$ est toujours un bilan énergétique, et on a :

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_x | \hat{\mathbf{f}}_x \rangle_{\hat{\mathcal{F}}_x} = H(\hat{\mathbf{x}}(1)) - H(\hat{\mathbf{x}}(0)). \quad (2.7)$$

Preuve pour les composants stockants.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{e}}_x | \hat{\mathbf{f}}_x \rangle_{\hat{\mathcal{F}}_x} &= \int_0^1 \langle [\xi_x \hat{\mathbf{f}}](\tau) | \hat{\mathbf{f}}_x(\tau) \rangle d\tau = \int_0^1 \langle [\nabla H \circ X \hat{\mathbf{f}}_x](\tau) | \hat{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau = \int_0^1 \langle \nabla H(\hat{\mathbf{x}}(\tau)) | \hat{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (H(\hat{\mathbf{x}}(\tau))) d\tau = H(\hat{\mathbf{x}}(1)) - H(\hat{\mathbf{x}}(0)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

□

Après un calcul similaire pour les autres composants, on peut conclure que le produit dual $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}}$ est un bilan d'énergie. On définit donc toujours $\hat{\mathbf{e}} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) \neq \mathcal{P}^*(\xi(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}))$ afin de conserver une trajectoire des flux qui a un sens pour le bilan énergétique.

Proposition 2.2.2 (Passivité du SHP projeté). *Soient $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ solution d'un SHP projeté (2.6) pour une entrée $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{e}} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{u}}) \in \hat{\mathcal{E}}$ la trajectoire des efforts reconstruite (non projetée). Notons $\hat{\mathbf{f}}_w$ la trajectoire des flux des composants sans mémoire, et $\hat{\mathbf{e}}_w = \xi_w(\hat{\mathbf{f}}_w) = z \circ \hat{\mathbf{f}}_w \in \hat{\mathcal{E}}_w$ la trajectoire des efforts de ces composants (non projetée).*

Alors, la passivité est respectée à l'échelle de la trame :

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_w | \hat{\mathbf{f}}_w \rangle_{\hat{\mathcal{F}}_w} = \int_0^1 \underbrace{\langle z(\hat{\mathbf{f}}_w(\tau)) | \hat{\mathbf{f}}_w(\tau) \rangle}_{\geq 0} d\tau \geq 0. \quad (2.9)$$

Il reste une dernière propriété importante à vérifier : le respect du bilan énergétique à l'échelle de la trame. On souhaite que le produit dual $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}}$, qui définit un bilan énergétique (voir [Proposition 2.2.1](#)), soit nul.

Structure de Dirac projetée

Pour ce faire, on définit dans cette section une structure de Dirac projetée, et on vérifie qu'elle implique le respect du bilan énergétique à l'échelle de la trame.

Récapitulatif des applications et domaines de définitions $\mathbb{B} = \{\psi_i\}_{i=0}^{p-1}$

Espaces de fonctions :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} &= \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}) & \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{E}) & \tilde{\mathcal{V}} &= \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{V}) \\ \mathcal{P} : \tilde{\mathcal{F}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{F}} & \mathcal{P}^* : \tilde{\mathcal{E}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{E}} & \mathcal{P}_{\mathcal{V}} : \tilde{\mathcal{V}} &\rightarrow \tilde{\mathcal{V}} \\ \hat{\mathcal{F}} &= \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{F}}) = \text{im } \mathcal{P} & \hat{\mathcal{E}} &= \mathcal{P}^*(\tilde{\mathcal{E}}) & \hat{\mathcal{V}} &= \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(\tilde{\mathcal{V}}) = \hat{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}) \cup \hat{\mathcal{E}}(\tilde{\mathcal{E}}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Applications linéaires :

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{F}} : \underbrace{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F})}_{\tilde{\mathcal{F}}} \rightarrow \underbrace{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{V})}_{\tilde{\mathcal{V}}} \\ \tilde{\mathcal{E}} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}} \\ \tilde{\mathcal{F}}^* : \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^* = \tilde{\mathcal{E}}^* \\ \tilde{\mathcal{E}}^* : \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^* \neq \tilde{\mathcal{F}} \text{ (dim infinie)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \hat{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{P} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \hat{\mathcal{V}} \\ \hat{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}} \circ \mathcal{P}^* : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{V}} \\ \hat{\mathcal{F}}^* = \mathcal{P}^* \circ \tilde{\mathcal{F}}^* : \hat{\mathcal{V}}^* \rightarrow \hat{\mathcal{F}}^* = \hat{\mathcal{E}} \\ \hat{\mathcal{E}}^* = \mathcal{P}^* \circ \tilde{\mathcal{E}}^* : \hat{\mathcal{V}}^* \rightarrow \hat{\mathcal{E}}^* = \hat{\mathcal{F}} \end{array} \quad (2.11)$$

Afin de définir une structure de Dirac projetée, on doit s'assurer que les trajectoires des flux et des efforts sont dans des espaces vectoriels de dimension finie. On considère donc dans la définition suivante les trajectoires projetées des flux et des efforts ($\hat{\mathbf{f}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{f}}) \in \hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathbf{e}} = \mathcal{P}^*(\xi(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{u}})) \in \hat{\mathcal{E}}$).

Proposition 2.2.3 (Structure de Dirac projetée). Intrinsèque Soient $\hat{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}\mathcal{P}^*$, $\hat{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}\mathcal{P}$ et

- en représentation noyau

$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{e}}) \in \hat{\mathcal{F}} \times \hat{\mathcal{E}} \left| \underbrace{\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{P}}_{\hat{\mathcal{F}}} \hat{\mathbf{f}} + \underbrace{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{P}^*}_{\hat{\mathcal{E}}} \hat{\mathbf{e}} = 0 \right. \right\},$$

- en représentation image

$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ (\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{e}}) \in \hat{\mathcal{F}} \times \hat{\mathcal{E}} \left| \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathcal{E}}^* \lambda, \quad \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathcal{F}}^* \lambda, \quad \forall \lambda \in \hat{\mathcal{V}}^* \right. \right\},$$

avec $\hat{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{V}})$ et $\hat{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{V}})$ vérifiant

$$\begin{aligned} (i) \quad & \hat{\mathcal{F}} \circ \hat{\mathcal{E}}^* + \hat{\mathcal{E}} \circ \hat{\mathcal{F}}^* = 0, \\ (ii) \quad & \text{rg} \left[\hat{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{E}} \right] = n. \end{aligned}$$

Alors $\hat{\mathcal{D}}$ est une structure de Dirac de dimension finie (voir Définition 1.4.1).

Par conséquent, pour tout $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{e}}) \in \hat{\mathcal{D}}$, $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}} = 0$.

Corollaire 2.2.1 (Bilan de puissance : flux projetés et efforts non projetés). Soient $\hat{\mathcal{D}} \subset \hat{\mathcal{F}} \times \hat{\mathcal{E}}$ une structure de Dirac projetée et \mathcal{P} le projecteur orthogonal tel que $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{F}})$.

Soient $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{e}}) \in \hat{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{E}}_u = L^2(\Omega, \mathcal{E}_u)$ le signal d'entrée tel que $\hat{\mathbf{e}} = \mathcal{P}^*(\xi(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{u}}))$. Soit $\hat{\mathbf{e}} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{u}})$ la trajectoire des efforts non projetés.

Alors, $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}}$ correspond au bilan d'énergie sur l'intervalle de temps Ω et ce bilan d'énergie est respecté :

$$\int_{\Omega} P(\tau) d\tau = \langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}} = 0. \quad (2.12)$$

Démonstration (corollaire). Soit $\hat{\varepsilon} = \xi(\hat{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \tilde{\mathcal{E}}$ la trajectoire non projetée des efforts, et $\hat{\mathbf{f}} \in \hat{\mathcal{F}}$ la trajectoire projetée des flux.

On prouve aisément que $\langle \hat{\varepsilon} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}}$ correspond à un bilan d'énergie sur la trame (même démarche que dans (2.8), étendue aux composants sans mémoire et aux ports d'interaction). Prouvons que ce bilan d'énergie est respecté : $\langle \hat{\varepsilon} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}} = 0$.

$\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ est un projecteur orthogonal donc

$$\hat{\varepsilon} = \mathcal{P}(\hat{\varepsilon}) + \underbrace{(\hat{\varepsilon} - \mathcal{P}(\hat{\varepsilon}))}_{:= \hat{\varepsilon}_\perp}, \quad \text{avec } \forall \hat{\mathbf{f}}_1 \in \hat{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{F}}), \quad \langle \hat{\varepsilon}_\perp | \hat{\mathbf{f}}_1 \rangle_{\hat{\mathcal{F}}} = 0,$$

car \mathcal{P} est un projecteur orthogonal.

Donc $\langle \hat{\varepsilon} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\hat{\mathcal{F}}} = \langle \mathcal{P}(\hat{\varepsilon}) + \hat{\varepsilon}_\perp | \hat{\mathbf{f}} \rangle = \langle \mathcal{P}(\hat{\varepsilon}) | \hat{\mathbf{f}} \rangle + \langle \hat{\varepsilon}_\perp | \hat{\mathbf{f}} \rangle = 0$.

□

2.3 Implémentation de la méthode

Dans cette section, on illustre la méthode sur un cas concret exprimé en coordonnées, qui répète toutes les étapes précédentes. Ce cas concret permet ensuite de décrire l'implémentation de la méthode.

Soit un système physique, d'état initial \mathbf{x}_0 , décrit sous forme du SHP noyau suivant *en coordonnées* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{F}\tilde{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}(t) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \tilde{\mathbf{f}}(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}(t) = \nabla H \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (2.13)$$

avec $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant les conditions pour définir une structure de Dirac (voir [équation 1.4.1](#)).

Remarque. Pour gagner en clarté, on travaille ici avec un système ne comprenant que des composants stockant de l'énergie. Pour un système avec des composants sans mémoire et des entrées on peut procéder de façon similaire, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{F}\tilde{\mathbf{f}}(t) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}(t) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_x(t) \\ \tilde{\mathbf{f}}_w(t) \\ \tilde{\mathbf{f}}_y(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \tilde{\mathbf{f}}_x(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}(t) = \begin{bmatrix} \nabla H \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ z(\tilde{\mathbf{f}}_w(t)) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est la trajectoire des entrées.

Formulation par trames

On découpe d'abord le temps de simulation choisi en trames de longueur $h = 1$ sans perte de généralité (voir page 18). Pour la trame k , en notant $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(kh)$ l'état à la fin de la trame précédente (donc l'état initial de la trame k), on cherche à résoudre le système suivant :

$$\forall \tau \in \Omega = [0, 1], \mathbf{F}\tilde{\mathbf{f}}^{(k)}(\tau) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}^{(k)}(\tau) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}}^{(k)}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \tilde{\mathbf{f}}^{(k)}(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}(\tau) = \nabla H \left[\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}(\tau) \right]. \quad (2.15)$$

Pour simplifier les notations, on travaille avec le temps adimensionné τ , tel que $\forall \tau \in \Omega, t(\tau) = (k + \tau)h$, et on omettra l'exposant (k) : on travaille toujours sur la trame k .

Les trajectoires des flux et des efforts sont des fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n . En reprenant les notations de la section précédente, on note $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{e}}) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{E}} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$: on identifie $\tilde{\mathcal{F}} = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et son dual $\tilde{\mathcal{E}}$. On note également $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ le produit scalaire sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Base de projection On choisit une base de fonctions sur laquelle on souhaite projeter les trajectoires des flux et des efforts. Les flux et les efforts sont ici des vecteurs de \mathbb{R}^n , il est donc possible de choisir la même base pour projeter chaque flux et chaque effort. Un tel choix est d'après le [Corollaire 2.2.1](#) suffisant pour garantir le respect du bilan de puissance.

Pour simplifier les calculs, on choisit ici une base orthonormée pour chaque état $j \in [0, n-1]$, $\mathbb{B}_j = \{\psi_{i,j}\}_{i=0}^{p-1}$. Pour une telle base, le projecteur scalaire peut s'exprimer $\mathcal{P}_j = \sum_{i=0}^{p-1} \langle \cdot, \psi_{i,j} \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R})} * \psi_{i,j}$.

La base de projection est alors $\mathbb{B} = \{\psi_{i,j}\}_{i=0, j=0}^{p-1, n-1}$, et on note \mathcal{P} le projecteur orthogonal associé. \mathcal{P} est orthogonal, donc auto-adjoint pour le produit scalaire sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$: $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$, c'est-à-dire $\forall (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{e}}) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{E}}, \quad \langle \tilde{\mathbf{e}}, \mathcal{P}\tilde{\mathbf{f}} \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}} = \langle \mathcal{P}^*\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}} = \langle \mathcal{P}\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle_{\tilde{\mathcal{F}}}$.

Remarque (Reproduction de la constante). Il est important que l'espace de projection contient la fonction constante. Si une telle pratique n'est pas requise pour les preuves théoriques réalisées dans ce rapport, cela permet de considérer la méthode PM présentée ici comme une extension de la méthode du gradient moyenné [16]. De plus, il s'agit d'une condition nécessaire pour la méthode RPM [17], afin de construire des projecteurs qui donnent des solutions d'ordre de régularité $k \geq 0$.

TABLE 2.2 – Résumé des notations utilisées

Algèbre

$$\otimes \quad \text{Produit de Kronecker : } A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Projection

$\mathbb{B} = \{\psi_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{p-1,n-1}$	Base de projection
\mathcal{P}	Projecteur orthogonal associé à \mathcal{B}
$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$	Projecteur adjoint de \mathcal{P}
$\underline{\Psi}$	Vecteur des fonctions de base
Ψ^*	Opérateur d'analyse
$\hat{\mathbf{a}}$	Trajectoire projetée
$\hat{\mathbf{a}}$	Coordonnées de $\hat{\mathbf{a}}$ dans \mathcal{B}

Notations

Les notations utilisées sont résumées dans le [tableau 2.2](#). Soit $\tilde{\mathbf{a}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une trajectoire (flux ou efforts),

Base de projection

$$\underline{\Psi} = [\psi_{0,0} \quad \cdots \quad \psi_{0,n-1} \mid \cdots \mid \psi_{p-1,0} \quad \cdots \quad \psi_{p-1,n-1}]^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{np}, \quad (2.16)$$

Trajectoire projetée La trajectoire projetée, notée $\hat{\mathbf{a}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, est obtenue en projetant la trajectoire $\tilde{\mathbf{a}}$ sur la base \mathbb{B} :

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.17)$$

Coordonnées d'une trajectoire Afin de définir les coordonnées de $\hat{\mathbf{a}} \in \hat{\mathcal{F}} = \text{span } \mathbb{B}$ dans la base \mathbb{B} , on définit un *opérateur d'analyse*

$$\Psi^* : \begin{cases} \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^{np} \\ \hat{\mathbf{a}} \mapsto \Psi^*(\hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} \langle \psi_{0,0}, \tilde{\mathbf{a}}_0 \rangle_{L^2} \\ \vdots \\ \langle \psi_{0,n-1}, \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} \rangle_{L^2} \\ \vdots \\ \langle \psi_{p-1,0}, \tilde{\mathbf{a}}_0 \rangle_{L^2} \\ \vdots \\ \langle \psi_{p-1,n-1}, \tilde{\mathbf{a}}_{n-1} \rangle_{L^2} \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (2.18)$$

et on note $\hat{\mathbf{a}} = \Psi^*(\tilde{\mathbf{a}})$. On a alors $\forall \tau \in \Omega, \hat{\mathbf{a}}(\tau) = \underline{\Psi}(\tau)^T \tilde{\mathbf{a}}$.

Projection des flux et des efforts

Projection des flux On approxime maintenant la trajectoire réelles des flux par une trajectoire $\hat{\mathbf{f}}$ dans l'espace de dimension finie $\hat{\mathcal{F}} = \text{span } \mathbb{B}$.

L'équation (2.15) devient alors :

$$\forall \tau \in \Omega, \mathbf{F}\hat{\mathbf{f}}(\tau) + \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \hat{\mathbf{f}}(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = \nabla H[\tilde{\mathbf{x}}(\tau)] = [\xi_x \hat{\mathbf{f}}](\tau). \quad (2.19)$$

Projection des efforts En général, l'équation 2.19 n'a pas de solution, car $\hat{\mathbf{e}}$ n'est a priori pas dans l'espace de projection $\hat{\mathcal{E}}$ ⁶.

On projette alors les efforts sur $\hat{\mathcal{E}}$ à l'aide du projecteur $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ pour que l'équation soit soluble. On obtient alors le système d'équations projeté :

$$\forall \tau \in \Omega, \mathbf{F}\hat{\mathbf{f}}(\tau) + \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}}(\tau) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \hat{\mathbf{f}}(\sigma) d\sigma \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{e}}(\tau) = \mathcal{P}[\nabla H \circ \tilde{\mathbf{x}}](\tau). \quad (2.20)$$

Dans l'équation (2.20), $\hat{\mathbf{f}}$ et $\hat{\mathbf{e}}$ sont des trajectoires dans l'espace de dimension finie $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{E}} = \text{span } \mathbb{B}$. Ces trajectoires peuvent donc être représentées par des vecteurs de \mathbb{R}^{np} : $\underline{\hat{\mathbf{f}}} = \Psi^* \hat{\mathbf{f}}$ et $\underline{\hat{\mathbf{e}}} = \Psi^* \hat{\mathbf{e}}$.

Formulation matricielle implémentée

En coordonnées, l'équation (2.20) devient :

$$[I_p \otimes \mathbf{F}]\underline{\hat{\mathbf{f}}} + [I_p \otimes \mathbf{E}]\underline{\hat{\mathbf{e}}} = 0_{\mathbb{R}^{np}}, \quad \text{avec} \quad \forall \tau \in \Omega, \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \underline{\Psi}(\sigma)^T \underline{\hat{\mathbf{f}}} d\sigma \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{e}}} = \Psi^*[\nabla H \circ \tilde{\mathbf{x}}]. \quad (2.21)$$

Les produits de Kronecker $I_p \otimes \mathbf{F}$ et $I_p \otimes \mathbf{E}$ (voir [tableau 2.2](#)) signifient que pour chaque ordre $i \in [0, p-1]$, $\mathbf{F}\hat{\mathbf{f}}_i + \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}}_i = 0_{\mathbb{R}^n}$, avec $\underline{\hat{\mathbf{f}}} = [\hat{\mathbf{f}}_0 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{f}}_{p-1}]^T$ et $\underline{\hat{\mathbf{e}}} = [\hat{\mathbf{e}}_0 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{e}}_{p-1}]^T \in \mathbb{R}^{np}$.

L'équation (2.21) peut être résolue numériquement. L'inconnu est le vecteur $\underline{\hat{\mathbf{f}}} \in \mathbb{R}^{np}$. Puisque \mathbf{E} et \mathbf{F} sont une structure de Dirac, elles satisfont la condition (ii) de la [Proposition 1.4.1](#), et le rang de la matrice $[I_p \otimes \mathbf{F} | I_p \otimes \mathbf{E}]$ est np . On a donc bien un système de np équations pour np inconnues.

En choisissant comme base \mathbb{B} une base de polynômes orthonormée (comme les polynômes de Legendre), on sait calculer parfaitement les produits scalaires et les intégrales à l'aide de la quadrature de Gauss-Legendre [8].

Toutes les opérations pour construire $\underline{\hat{\mathbf{e}}}$ à partir de $\underline{\hat{\mathbf{f}}}$ sont dérivables, on peut donc utiliser la méthode de Newton-Raphson pour résoudre le système (2.21).

2.3.1 Propriétés de la méthode PM en représentation noyau

Pour ce type de méthode numérique, on se pose trois questions : existe-t-il une solution ? Est-elle unique ? Et si oui, quel est l'ordre de convergence de la méthode en fonction de la fréquence d'échantillonnage ? Ce stage n'a pas permis d'aboutir à une réponse théorique à ces questions, mais des pistes sont énoncées et commentées ci-dessous.

Existence et unicité de la solution

Dans [17] (théorème 5.5 p135), pour un système *sans contraintes*, Rémy Müller utilise la méthode du point fixe pour déterminer une condition *suffisante* d'existence et d'unicité de la solution de la méthode RPM en formulation hybride. Il s'agit d'une condition sur les constantes de Lipschitz de la structure de Dirac et des lois des composants projetées.

D'après [Proposition 1.4.2](#), il est possible de traduire une structure de Dirac en représentation noyau (comme $\hat{\mathcal{D}}$ ici), en une structure de Dirac en représentation hybride. Pour les systèmes sans contraintes, après passage de la structure de Dirac en représentation hybride, on peut donc obtenir une condition d'existence et d'unicité de la solution de la méthode PM noyau en formulation noyau, utilisant la méthode du point-fixe.

Il est cependant indiqué dans [17], à la suite de ce théorème, que cette condition est souvent trop stricte : la convergence de la méthode du point fixe implique celle de la méthode de Newton-Raphson (utilisée en pratique), mais la réciproque est fausse.

Ainsi, la condition trouvée, relativement simple à calculer une fois la structure de Dirac en représentation hybride, ne permet pas toujours de garantir la convergence en augmentant la fréquence d'échantillonnage.

De plus, on est ici particulièrement intéressé par les systèmes *avec contraintes*, pour lesquels il n'existe pas encore de preuve théorique d'existence et d'unicité de la solution.

6. Voir page 20 pour plus de détails sur la justification.

Ordre de convergence

En utilisant une représentation d'un SHP non développée ici, sans contraintes, en $J - R$, il est possible de prouver que la méthode PM d'ordre p possède un ordre de convergence $s \geq 2p$. Cela signifie que pour un pas de temps h , l'erreur locale sur l'état vérifie

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0 + h) - \mathbf{x}_1 \underset{h \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(h^{s+1}),$$

avec $\tilde{\mathbf{x}}$ la trajectoire des états que l'on souhaite approcher, \mathbf{x}_k l'échantillon au temps $t_0 + kh$ de la trajectoire simulée et $s \geq 2p$ (voir détail page 128 et preuve en annexe D de [17]).

Une telle preuve n'a pas encore été réalisée dans les cas avec contraintes qui nous intéressent ici.

En l'absence de preuve théorique, on cherche à vérifier expérimentalement que la méthode numérique développée durant ce stage converge bien vers une solution unique quel que soit l'ordre, et à formuler des hypothèses sur l'ordre de convergence en fonction de p . On s'intéresse pour cela à un système le plus simple possible, mais qui inclut les deux difficultés principales qui nous intéressent : une contrainte sur les efforts et des lois non linéaires. Ces deux difficultés sont présentes dans l'appareil vocal qui est le sujet d'étude initial de ce stage. Ce système est un circuit électrique LLC décrit dans la section ci-dessous. Il sera simulé dans différents cas, en utilisant une implémentation réalisée en Python de la méthode PM noyau ⁷.

2.4 Exemple d'application : circuit LLC

Mise en forme du circuit en SHP représentation noyau

On considère le circuit de la figure 2.1, formé par un condensateur linéaire, une bobine linéaire et une bobine non linéaire, d'énergie :

$$H(q_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{\phi_2^2}{L_2} \right) + E_{3_0} \log \left(\cosh \left(\frac{\phi_3}{\phi_{3_0}} \right) \right) \quad (2.22)$$

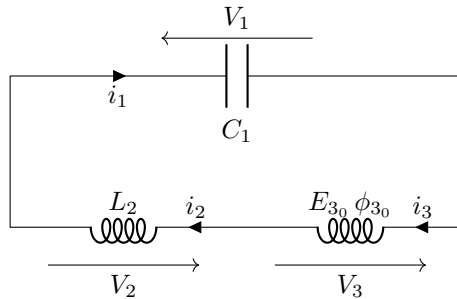


FIGURE 2.1 – Circuit électrique LLC linéaire.

Définition des états, flux et efforts du système On définit dans un premier temps l'état, les flux et les efforts du système :

État $\mathbf{x} = [q_1, \phi_2, \phi_3]^T \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ avec $n := 3$.

Flux Les flux sont définis comme la dérivée des états :

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}} = [\dot{q}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3]^T = [i_1, v_2, v_3]^T \in \mathcal{F} = \mathbb{R}^n. \quad (2.23)$$

Efforts Les efforts sont définis comme le gradient du Hamiltonien :

$$H(q_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{\phi_2^2}{L_2} \right) + E_{3_0} \log \left(\cosh \left(\frac{\phi_3}{\phi_{3_0}} \right) \right), \text{ donc}$$

$$\mathbf{e} = \nabla H(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial \phi_2}, \frac{\partial H}{\partial \phi_3} \right]^T = \left[\frac{q_1}{C_1}, \frac{\phi_2}{L_2}, \frac{E_{3_0}}{\phi_{3_0}} \tanh \left(\frac{\phi_3}{\phi_{3_0}} \right) \right]^T \in \mathcal{E} = \mathbb{R}^n. \quad (2.24)$$

⁷. J'ai codé cette méthode en m'appuyant sur un solveur créé par Thomas Risse pour la méthode PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite.

Mise en forme sous forme de SHP en représentation noyau On obtient alors une *représentation noyau* du système sous la forme :

$$\begin{array}{l} (i) \quad \text{Loi des mailles} \\ (ii) \quad i_2 = i_1 \\ (iii) \quad i_3 = i_1 \end{array} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \times & \times \\ \times & 1 & 0 \\ \times & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{e}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \times & 1 & 1 \\ -1 & \times & \times \\ -1 & \times & \times \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{f}} = 0 \quad (2.25)$$

La première ligne du système d'équation exprime la loi des mailles, tandis que les secondes illustrent le branchement en série des composants. Les \times indiquent les coefficients des matrices pour lesquelles une valeur non nulle n'aurait pas de sens physique : on ne peut additionner entre eux que des courants ou des tensions, pas les deux simultanément⁸.

On vérifie que les conditions sur \mathbf{E}, \mathbf{F} définissant une structure de Dirac sont bien satisfaites :

$$\mathbf{E}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}\mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Donc

$$\begin{array}{l} (i) \quad \mathbf{E}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{E}^T = 0, \\ (ii) \quad \text{rg} [\mathbf{F}|\mathbf{E}] = n. \end{array} \quad (2.26)$$

Remarque (Expression dans l'espace des bonds). On peut également écrire le système avec une matrice de taille $n \times 2n$ \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{F} \mid \mathbf{E}] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & i_1 & v_2 & v_3 & v_1 & i_2 & i_3 \\ \times & 1 & 1 & & 1 & \times & \times \\ -1 & \times & \times & & \times & 1 & 0 \\ -1 & \times & \times & & \times & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.27)$$

$$\text{et } \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = 0.$$

Remarque (Non-unicité de la représentation noyau). On peut également modifier la 2e ou la 3e ligne en exprimant plutôt $i_2 = i_3$.

On obtient alors des matrices $\mathbf{B} = [\mathbf{F} \mid \mathbf{E}]$ différentes :

$$\mathbf{B}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & i_1 & v_2 & v_3 & v_1 & i_2 & i_3 \\ \times & 1 & 1 & & 1 & \times & \times \\ -1 & \times & \times & & \times & 1 & 0 \\ 0 & \times & \times & & \times & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \mathbf{B}_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & i_1 & v_2 & v_3 & v_1 & i_2 & i_3 \\ \times & 1 & 1 & & 1 & \times & \times \\ 1 & \times & \times & & \times & 0 & -1 \\ 0 & \times & \times & & \times & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (2.28)$$

Ces représentations sont équivalentes, et définissent toutes deux une structure de Dirac.

Application de la méthode de projection temporelle L'équation (2.25) nous donne la structure de Dirac, et les équations (2.23) et (2.24) nous donnent les lois des composants. On peut donc appliquer la méthode de projection temporelle présentée plus tôt pour résoudre le système.

On choisit de projeter le système sur la base des p premiers polynômes de Legendre normés et translétés sur l'intervalle $\Omega = [0, 1]$ (d'ordre 0 à $p-1$).

Simulation du circuit avec une condition initiale variable

On fait varier la condition initiale afin de se placer dans une région de moins en moins linéaire, et on fait varier l'ordre de projection pour voir son influence.

Les valeurs des composants du circuit LLC sont données dans le [tableau 2.3](#), et ceux du solveur dans le [tableau 2.4](#). Le nombre de points de quadrature est le nombre de points utilisés au moment du calcul d'intégrales avec la

⁸. Il est aussi possible de définir des matrices \mathbf{E} et \mathbf{F} non adimensionnées, auquel cas un terme non nul pourrait avoir un sens. Ce n'est cependant pas le cas dans ce rapport.

Paramètre	Valeur
C_0	1 F
L_2	3 H
L_3	3 H
ϕ_{3_0}	1 Wb
$E_{3_0} = \frac{\phi_{3_0}^2}{L_3}$	0,33 J

TABLE 2.3 – Paramètres du circuit LLC pour tous les exemples présentés.

Paramètre	Valeur
Nombre de points de quadrature	20
Seuil d'erreur de la méthode de Newton-Raphson	10^{-10}

TABLE 2.4 – Paramètres du solveur.

méthode de Gauss-Legendre, et le seuil d'erreur ϵ est celui utilisé pour la méthode de Newton-Raphson : à chaque itération, l'algorithme continue jusqu'à ce que $\|\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{F}\hat{\mathbf{f}}\|_\infty < \epsilon$.

Pour de faibles amplitudes, la bobine non linéaire a le même comportement que la bobine linéaire, comme illustré dans la [figure 2.2](#) :

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_3}(\mathbf{x} = 0) = \frac{1}{L_3} = \frac{1}{L_2} = \frac{\partial H}{\partial \phi_2}(\mathbf{x} = 0).$$

Dans ce régime linéaire à faibles amplitudes, la période du circuit est $T = 2\pi\sqrt{(L_2 + L_3)C_1} \simeq 15,4$ s. Bien que la non-linéarité d'une des deux bobines implique des harmoniques et une modification de la période du circuit, on peut se référer à cette période T pour choisir une fréquence d'échantillonnage.

Simulation à basse fréquence d'échantillonnage On effectue une première simulation pour une fréquence d'échantillonnage $f_s = 1$ Hz, $p = 2$ et un état initial $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 0]^T$. On trace les trajectoires obtenus dans la [figure 2.3](#). Pour les flux, on trace pour chaque trame la trajectoire calculée : $\hat{\mathbf{f}}(\tau) = \underline{\Psi}^T(\tau)\hat{\mathbf{f}}$, où $\underline{\Psi}$ est la matrice de projection temporelle. On peut choisir de tracer autant de points que l'on souhaite à chaque trame, puisque pour chaque trame on dispose d'une expression en temps continu de la trajectoire calculée. On choisit ici de tracer 10 points par trame.

Pour les états et les efforts, on dispose d'un point par trame, mais on peut en ajouter à souhait pour obtenir une trajectoire plus lisse, par intégration des flux. Cette intégration (par quadrature de Gauss-Legendre) est effectuée *après* la simulation. On choisira ici aussi de tracer 10 points par trame. On distinguera les points calculés durant la simulation (début et fin de trame) en les marquant d'un cercle.

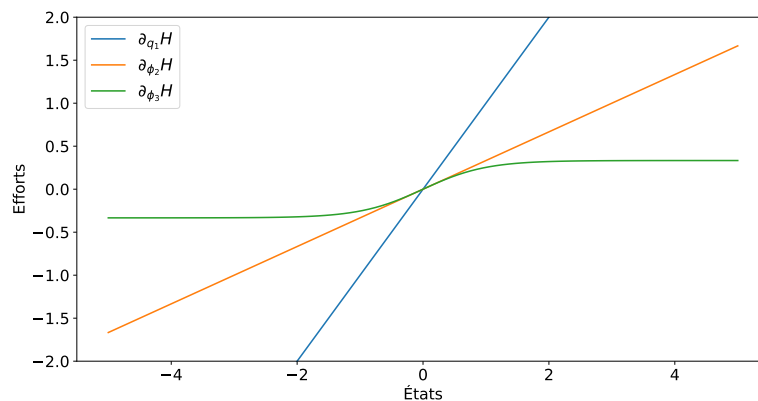


FIGURE 2.2 – Dérivée partielle du Hamiltonien en fonction des états des composants du circuit. La pente à l'origine est la même pour les efforts des deux bobines.

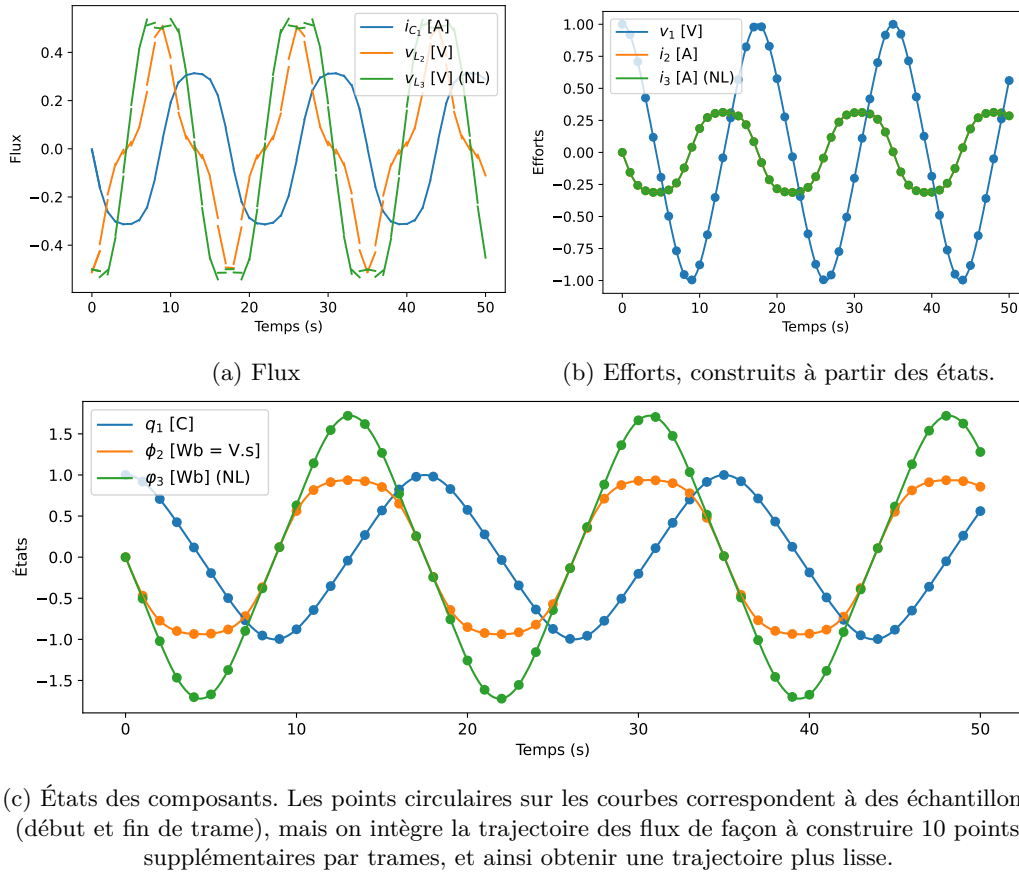


FIGURE 2.3 – Flux, efforts et états du circuit LLC pour $f_s = 1$ Hz, $p = 2$ et $\mathbf{x}_0 = [1; 0; 0]^T$. Les courbes des courants i_2 et i_3 sont superposées : la contrainte est bien respectée.

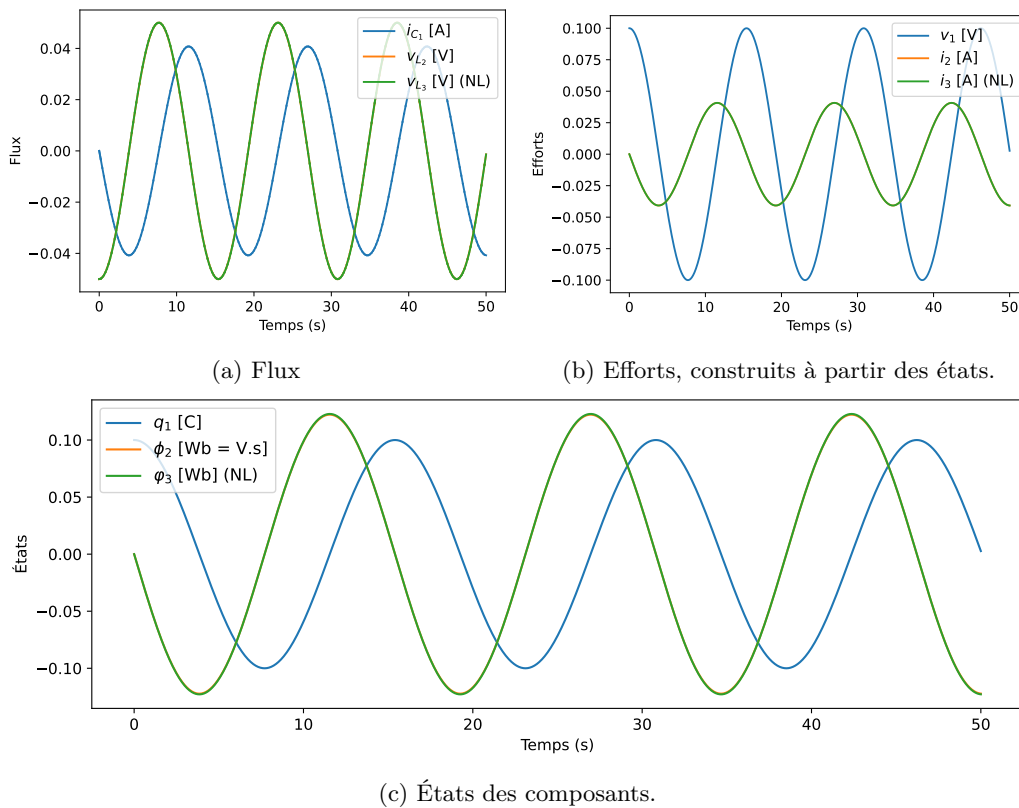
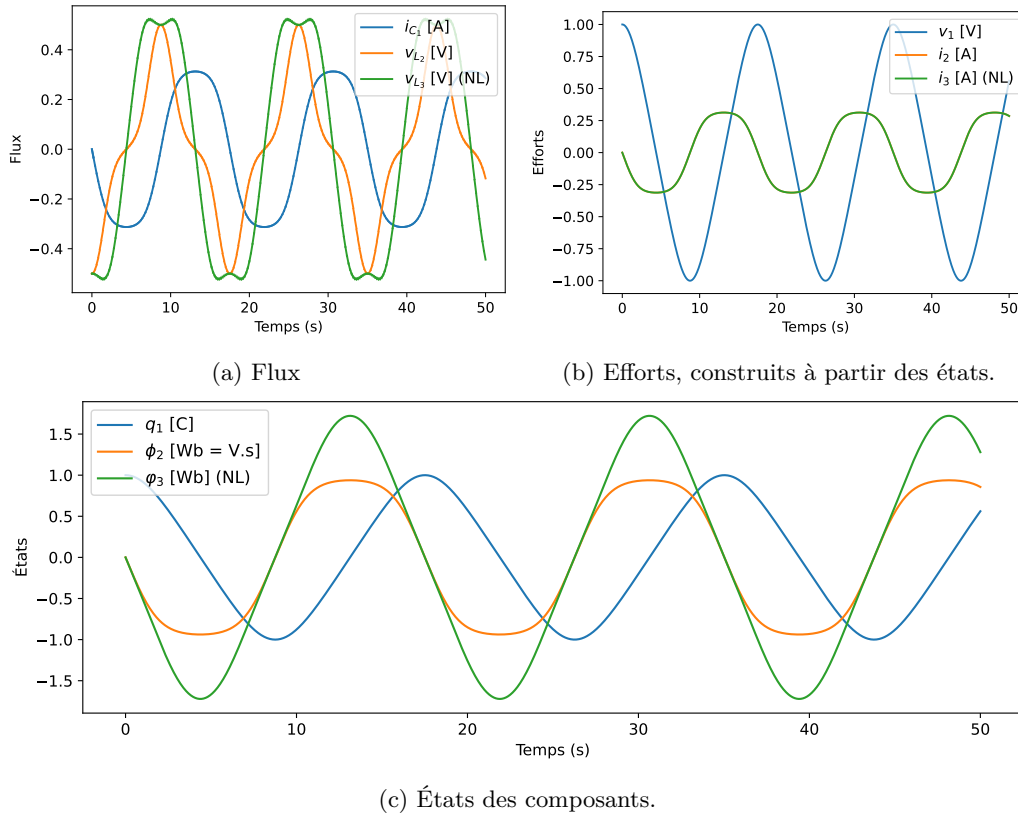


FIGURE 2.4 – Flux, efforts et états du circuit LLC pour $f_s = 5$ Hz, $p = 2$ et $\mathbf{x}_0 = [0, 1; 0; 0]^T$.


 FIGURE 2.5 – Flux, efforts et états du circuit LLC pour $f_s = 5$ Hz, $p = 2$ et $\mathbf{x}_0 = [1; 0; 0]^T$.

On constate que la trajectoire des flux n'est pas continue : il n'y a pas de régularisation opérée pour forcer la continuité des flux, contrairement à la méthode RPM décrite dans [17] (le R de RPM désignant l'étape de régularisation). La trajectoire des états (et donc des efforts), est par contre continue, car elle est obtenue par intégration des flux.

Variation de l'état initial Afin d'observer le comportement du système, on simule à présent le circuit pour plusieurs conditions initiales, à p et f_s constants : on cherche à se placer dans un régime de plus en plus non linéaire. On choisit donc des conditions initiales de plus en plus éloignées de l'origine.

La charge initiale du condensateur prend les valeurs 0, 1; 1; 5 C. On trace les mêmes trajectoires, mais on augmente la fréquence d'échantillonnage à $f_s = 5$ Hz : pour $p = 2$, $f_s = 1$ Hz est insuffisant pour approcher la trajectoire des flux⁹. On ne trace plus les points marquant les débuts et fins de trame pour ne pas surcharger les graphiques. Les trajectoires sont présentées dans les figures 2.4, 2.5 et 2.6.

On observe que plus la condition initiale est éloignée de l'origine, plus les deux bobines ont un comportement différent. Pour une charge initiale du condensateur de 0,1 C, les trajectoires des flux et des efforts des bobines se superposent. A l'inverse, pour une charge initiale de 5 C, la bobine non linéaire a un comportement très différent de la bobine linéaire, comme illustré dans la figure 2.6. On observe néanmoins dans la figure 2.6d que les efforts des deux bobines restent égaux, comme imposé par la contrainte du circuit.

Les courbes obtenues, sont conformes à nos attentes dans les 3 exemples, y compris dans un cas avec une forte saturation.

Respect de la contrainte dans les conditions initiales

Une des difficultés de l'exemple choisi est la présence d'une contrainte sur les efforts : les efforts des deux bobines (les courants i_2 et i_3) doivent être égaux.

9. Mais après intégration, la trajectoire des états est continue et se rapproche de celle obtenue pour des fréquences d'échantillonnage plus élevées.

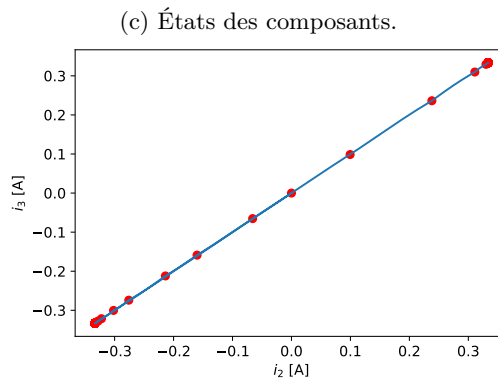
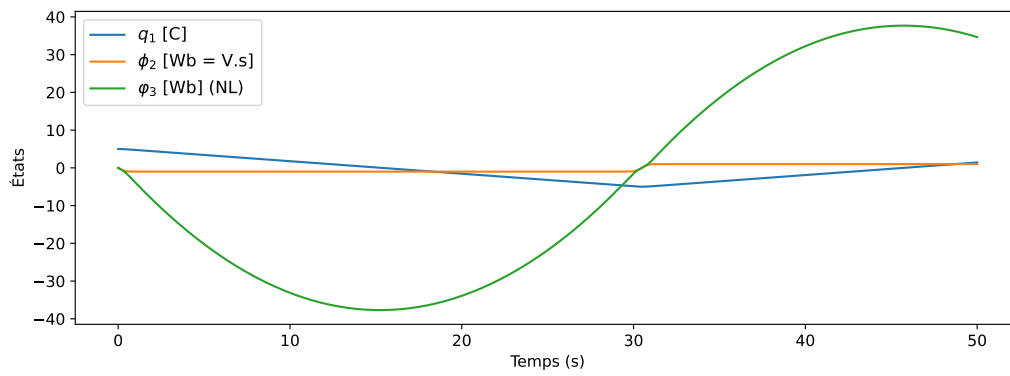
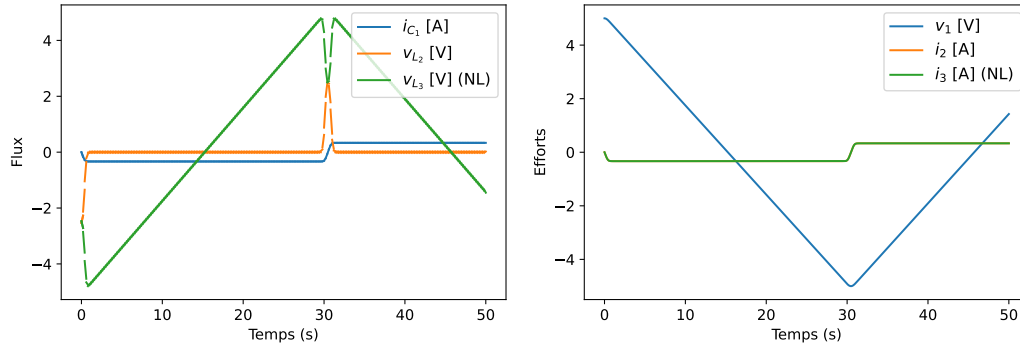


FIGURE 2.6 – Flux, efforts et états du circuit LLC pour $f_s = 5$ Hz, $p = 2$ et $\mathbf{x}_0 = [5; 0; 0]^T$.

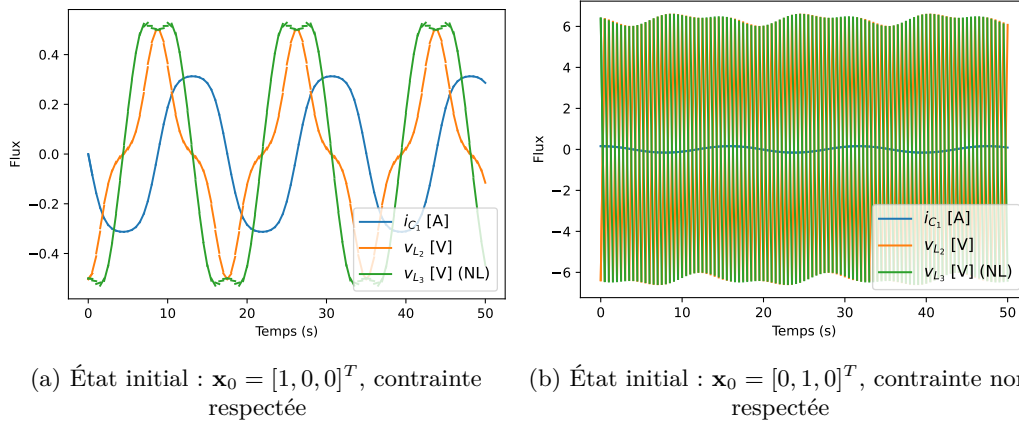


FIGURE 2.7 – Flux du circuit LLC pour des conditions initiales respectant ou non la contrainte.

Cela signifie entre autre que l'état d'initialisation du système \mathbf{x}_0 renseigné par l'utilisateur doit respecter cette contrainte, puisque $\mathbf{e}_0 = \nabla H(\mathbf{x}_0)$.

De manière plus générale, la présence d'une contrainte se traduit par le fait que le rang de la matrice \mathbf{F} n'est pas plein : $\text{rg}(\mathbf{F}) < n$. Avec une matrice \mathbf{F} de rang plein, la relation $\mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{E}\mathbf{e} = 0$ n'implique pas de relations entre les seuls efforts (donc pas de contraintes sur les états initiaux).

Lorsque la matrice \mathbf{F} n'est pas de rang plein, il est important que le solveur vérifie que les conditions initiales respectent bien la contrainte. Pour ce faire, on effectue un changement de base, afin que \mathbf{F} soit sous forme échelonnée réduite, c'est-à-dire que le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

Exemple d'une telle matrice échelonnée réduite :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ où } * \text{ représente une valeur quelconque.}$$

On applique le même changement de base à la matrice \mathbf{E} et au vecteur des efforts \mathbf{e} . On note \mathbf{F}' , \mathbf{E}' et \mathbf{e}' les matrices et vecteurs transformés.

Pour un système ne comprenant que *des composants stockant de l'énergie*, les lignes de \mathbf{F}' nulles traduisent une contrainte sur les efforts. Si la ligne i de \mathbf{F}' est nulle, on prend la ligne i de \mathbf{E}' , notée \mathbf{E}'_i , et on vérifie si $\mathbf{E}'_i \mathbf{e}' = 0$. Si ce n'est pas le cas, la contrainte n'est pas vérifiée.

Pour un système comprenant des composants sans mémoire (comme une résistance), ou des ports d'interaction (connectés à des générateurs par exemple), la condition est un peu plus complexe : il faut aussi tenir compte de l'entrée initiale $\mathbf{u}(0)$ donnée par l'utilisateur et vérifier si les termes de \mathbf{E}'_i pour les composants sans mémoire sont nuls.

Exemples On simule le circuit pour plusieurs conditions initiales, sans vérifier que la contrainte est respectée.

Un premier exemple est donné par $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 0]^T$. On vérifie que la contrainte est respectée, et on simule le circuit pour $p = 2$ et $f_s = 2$ Hz. On simule ensuite le même système, mais avec $\mathbf{x}_0 = [0, 1, 0]^T$: la contrainte n'est pas respectée. Les trajectoires des flux sont illustrées dans la [figure 2.7](#). On y observe que les trajectoires semblent bien périodique dans les deux cas, mais ne correspondent à aucune réalité physique pour le second exemple. Dans le premier cas, on note que la période est légèrement plus longue que T : c'est la non-linéarité de la bobine L_3 qui se manifeste.

La présence d'une vérification que la contrainte initiale est respectée est donc essentielle pour garantir que les simulations sont physiquement cohérentes et éviter que l'utilisateur ne simule un système non physique.

On notera cependant que l'algorithme décrit dans ce paragraphe fait intervenir le calcul de la forme échelonnée réduite d'une matrice, ce qui peut être coûteux en temps de calcul pour des systèmes de grande taille. Pour gagner du temps, si le système le permet, mettre en évidence la (ou les) contrainte(s) avec une (ou plusieurs) ligne(s) de \mathbf{F} nulle(s) peut éviter d'avoir à calculer la forme échelonnée réduite de \mathbf{F} .

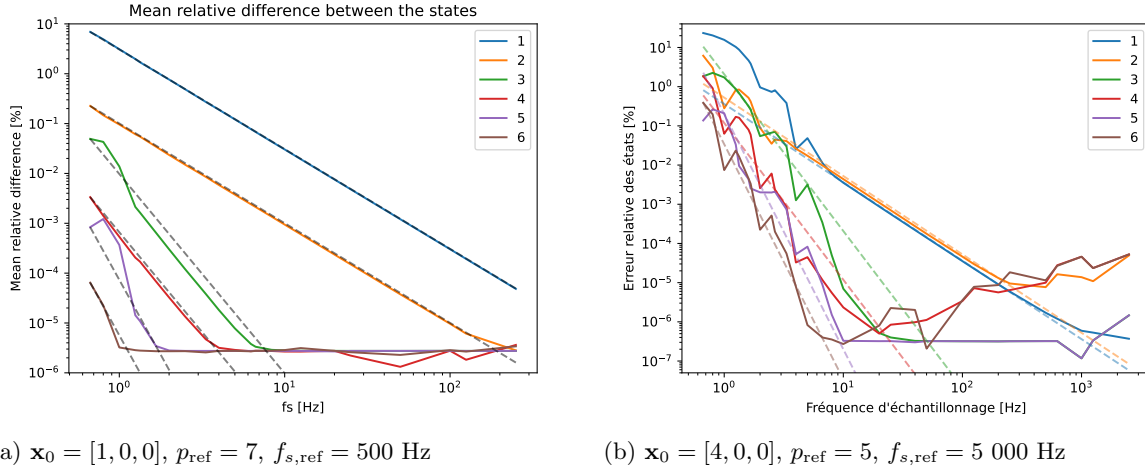


FIGURE 2.8 – Courbes de convergence des états. Pour chaque simulation, on calcule la moyenne sur toute la simulation et tous les états de l'erreur relative, voir (2.29). On trace en pointillés les hypothèses d'ordre de convergence : $(1/f_s)^p$ si p est pair et $(1/f_s)^{p+1}$ si p est impair. Les deux simulations ont été effectuées sur une durée de 20 s.

Courbes de convergence

On choisit d'étudier les états de simulations pour des ordres de projection p et des fréquences d'échantillonnage f_s différents. Chacune de ces simulations est comparée à une solution de référence obtenue avec un ordre de projection p_{ref} donné et une fréquence d'échantillonnage $f_{s,\text{ref}}$ plus élevée. La solution de référence est sous-échantillonnée d'un facteur $f_{s,\text{ref}}/f_s$ pour comparer les échantillons.

Pour un ordre de projection p , une fréquence d'échantillonnage f_s , et un état x_i , on définit l'erreur relative sur l'état x_i à l'échantillon¹⁰ $k \in [0, K]$ comme

$$\text{err}_{i,k} = \frac{|x_i^{(k)} - x_{i,\text{ref}}^{(k)}|}{\frac{1}{K} \sum_{l=0}^K |x_{i,\text{ref}}^{(l)}|} * 100, \quad \text{avec} \quad x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{1}{f_s} \int_0^1 \hat{f}_i^{(k)}(\tau) d\tau.$$

$$\text{err} = \frac{1}{nK} \sum_{i=1}^n \text{err}_{i,k}, \quad \text{avec} \quad n \text{ le nombre d'états et } K \text{ le nombre d'échantillons.} \quad (2.29)$$

La durée de la simulation est $\left\lfloor \frac{K-1}{f_s} \right\rfloor$, puisqu'il y a une trame de moins que d'échantillons.

Pour chaque ordre de projection p on augmente la fréquence d'échantillonnage f_s et on trace dans la figure 2.8 la moyenne de l'erreur relative sur tous les états et tous les échantillons.

En changeant l'ordre de projection p de la solution de référence, on vérifie que les courbes d'erreur ont la même allure : les méthodes pour des ordres de projection différents convergent bien vers la même solution. Pour choisir la fréquence d'échantillonnage et l'ordre de projection de la référence, on vérifie que la simulation a bien convergé vers la même solution que les autres simulations (on ne choisira donc pas $p = 1$ et $f_s = 500$ Hz par exemple).

Sur la figure 2.8a, toutes les courbes convergent vers un seuil d'erreur, explicable par l'erreur numérique lors de la résolution de l'algorithme de Newton-Raphson. On observe que l'erreur relative diminue avec l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage, et que l'ordre de projection a un impact sur la valeur de l'erreur à la fréquence la plus basse et la vitesse de convergence. Avec ces résultats, on formule l'hypothèse que la méthode de projection temporelle PM possède un ordre de convergence $p - 1$ si p est pair, et p si p est impair.

La figure 2.8b met en évidence que si cette hypothèse semble très bien vérifiée pour un système « peu » non linéaire, elle est plus difficile à vérifier pour des dynamiques fortement non linéaires. On observe sur cette seconde figure que les ordres de projection pairs semblent se distinguer des ordres impairs. En effet, après une certaine

¹⁰. La méthode numérique fonctionne par trame pour le calcul des flux, mais calcule bien des échantillons des états et des efforts. Après calcul des trajectoires, on peut recalculer des échantillons intermédiaires pour les trajectoires des états et des efforts en intégrant la trajectoire des flux.

fréquence d'échantillonnage, l'erreur relative semble remonter. L'explication de ce phénomène n'a pas encore été trouvée.

Enfin, pour une étude de convergence plus rigoureuse, il est nécessaire de comparer la méthode PM à une méthode de référence, dont la convergence est connue. Une première étape est la comparaison à la méthode PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite. Dans le cas avec contraintes, il n'y a cependant pas de preuve théorique de la convergence de cette méthode très proche.

Comparaison avec un solveur PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite et efficacité de Newton-Raphson

L'étape principale du solveur est la résolution de l'équation (2.25) par la méthode de Newton-Raphson pour chaque trame. On compare dans les figures 2.9 et 2.10 la vitesse de convergence de Newton-Raphson avec la méthode PM en représentation noyau (développée durant le stage) et en représentation différentielle-algébrique semi-explicite (implémentée par Thomas Risse). Les états initiaux sont $\mathbf{x}_0 = [4, 0, 0]^T$, et les paramètres des deux solveurs sont identiques : quadrature de Gauss-Legendre d'ordre 20 et seuil de Newton-Raphson $\epsilon = 10^{-10}$.

Le nombre d'itérations de Newton-Raphson est bien plus faible pour la méthode PM en représentation noyau que pour la méthode PM en représentation différentielle-algébrique semi-explicite, et la différence en temps de calcul est notable (16,7 secondes contre 4 minutes et 30 secondes pour tracer les courbes des figures 2.9 et 2.10). Cela peut en partie s'expliquer par le fait que la méthode PM en représentation noyau doit résoudre un système de dimension $np = 3p$ à chaque trame, alors que la méthode PM en représentation différentielle-algébrique semi-explicite doit résoudre un système de dimension $np = 4p$ à cause de la contrainte formulée par un multiplicateur de Lagrange.

Afin de vérifier que la méthode PM noyau converge plus vite vers *la même solution* que la méthode PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite, on compare les états obtenus avec les deux méthodes pour un ordre de projection p et une fréquence d'échantillonnage f_s donnés.

Pour $p = 4$ et $f_s = 10$ Hz, on calcule la différence relative moyenne entre les états obtenus avec la méthode PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite et ceux obtenus avec la méthode PM noyau, selon l'équation (2.4). Cette erreur relative moyenne est inférieure à $3 * 10^{-6}$, ce qui est de l'ordre de grandeur des erreurs entre deux simulations PM noyau pour un ordre différent, comme illustré dans la figure 2.8. On en déduit que la méthode PM noyau converge bien vers la même solution que la méthode PM en formulation différentielle-algébrique semi-explicite.

On a donc montré que la méthode PM en représentation noyau est plus rapide que la méthode PM en représentation différentielle-algébrique semi-explicite, dans ce cas présentant une non-linéarité et une contrainte. Pour compléter ce travail, il serait intéressant de comparer la méthode PM en représentation noyau à une autre méthode de référence.

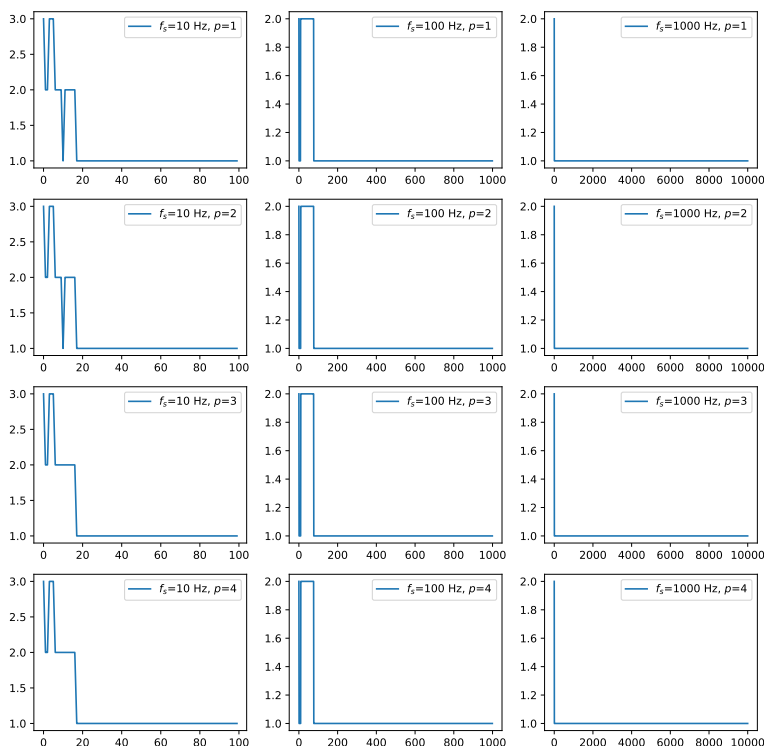


FIGURE 2.9 – Nombre d’itérations de Newton-Raphson à chaque trame pour converger vers une solution. Méthode PM en représentation noyau.

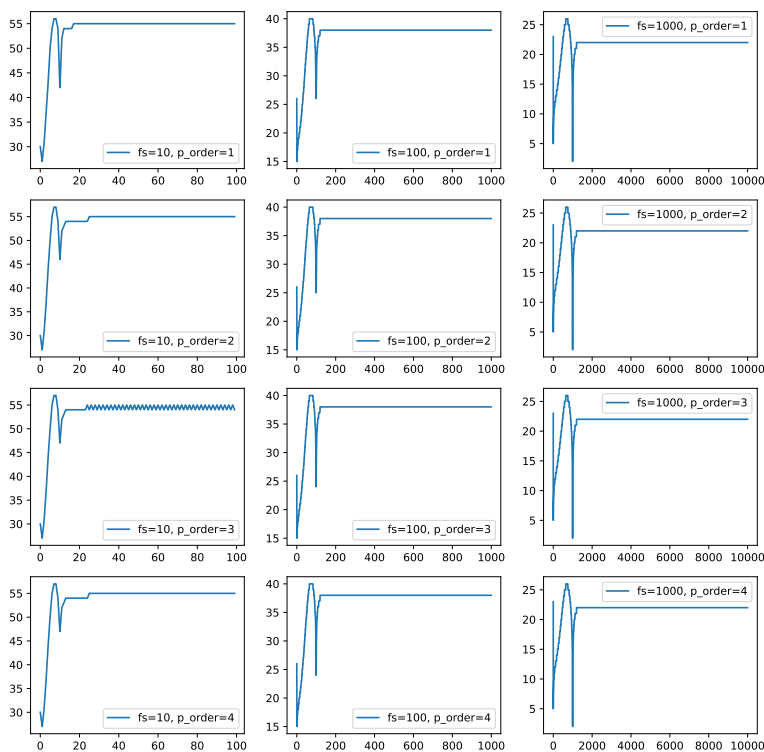


FIGURE 2.10 – Nombre d’itérations de Newton-Raphson à chaque trame pour converger vers une solution. Méthode PM en représentation différentielle-algébrique semi-explicite (DAE).

Chapitre 3

Vers une application à l'appareil vocal

Le cadre d'application choisi pour ce stage était celui de l'appareil vocal. Le cœur du travail réalisé durant ce stage étant concentré sur le développement d'une nouvelle méthode numérique, on ne s'attarde pas sur le choix du modèle de l'appareil vocal. Un premier pas en vue de la simulation de l'appareil vocal dans son entièreté réside dans la simulation d'un modèle du modèle en blocs fonctionnels (« lumped-parameter model » en anglais) tiré de [24]. La méthode développée étant pour l'instant limitée à des équations différentielles ordinaires, on travaille sur un modèle de l'appareil vocal déjà discrétisé spatialement en amont.

3.1 Présentation du modèle de Wetzel [24]

Le modèle du conduit vocal de [24] est un modèle par tronçon, où chaque tronçon peut être représenté par le circuit électrique équivalent de la [figure 3.1](#). Chaque tronçon est constitué de composants stockant de l'énergie (condensateurs et inductances), de composants sans mémoire (résistances) et de ports d'interaction (sources de courant et de tension). Les composants sont reliés par des relations de type loi des mailles et loi des nœuds, qui sont exprimées par une structure de Dirac.

Pour un tronçon seul, il n'y a pas de contraintes dans le système. Cependant, lors de la connexion de tronçons entre eux, des contraintes apparaissent. En effet, pour connecter un tronçon A et un tronçon B , on impose $q_{R_A} = q_{L_B}$: on connecte deux bobines en série, et on revient au cas traité dans l'exemple LLC dans la section [2.4](#). Pour le circuit LLC, on a montré que la méthode numérique PM noyau permettait de simuler le système en respectant le bilan énergétique de manière plus efficace que PM en représentation différentielle-algébrique semi-explicite.

Il est donc logique de convertir le modèle de Wetzel en représentation noyau, et de simuler le système avec la méthode développée durant ce stage. Ce travail a été effectué et le modèle de Wetzel a été implémenté en représentation noyau pour un nombre arbitraire de tronçons. Cependant, le temps a manqué pour simuler ce modèle et aboutir à des résultats numériques intéressants.

On présente néanmoins de manière succincte le modèle de Wetzel, et la méthode utilisée pour le convertir en représentation noyau.

3.2 Représentation noyau et image du modèle

3.2.1 Modèle pour un seul tronçon

Pour un tronçon, le modèle de Wetzel, illustré dans le schéma [3.1](#), est décrit par le SHP suivant, en formulation différentielle-algébrique semi-explicite :

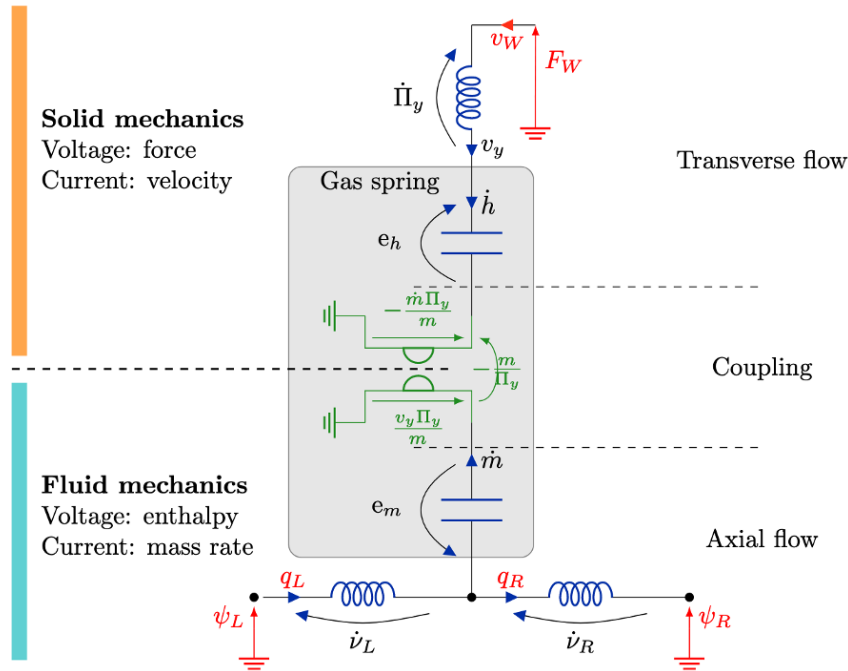


FIGURE 3.1 – Schéma équivalent du circuit électrique du modèle de conduit tiré de [24], avec les composants de stockage (en bleu), les composants sans mémoire (en vert) et les ports externes (en rouge). A gauche, analogie utilisée pour chaque partie du système.

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_L \\ \dot{\nu}_R \\ \dot{\Pi}_y \\ \dot{m} \\ \dot{h} \\ \dot{m} \\ v_w \\ -q_L \\ q_R \\ -v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & -1 & -1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & -1 & & & & \\ & & & -1 & -1 & & & & & 1 \\ 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ -1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\nu_L} H(\mathbf{x}) = q_L \\ \nabla_{\nu_R} H(\mathbf{x}) = q_R \\ \nabla_{\Pi_y} H(\mathbf{x}) = v_y \\ \nabla_m H(\mathbf{x}) = \langle \psi \rangle_\Omega \\ \nabla_h H(\mathbf{x}) = -\langle p \rangle_\Omega S_w \\ \frac{v_w \Pi_y}{m} \\ -\frac{m \Pi_y}{m} \\ \psi_L \\ \psi_R \\ F_w \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Passer un tronçon en représentation noyau est trivial : étant donné qu'il n'y a pas de contraintes, il suffit de poser $\mathbf{F} = -\mathbf{I}$ et $\mathbf{E} = \mathbf{S}$ avec \mathbf{S} antisymétrique de l'équation (3.1). La différence entre les deux représentations apparaît au moment de la connexion de deux tronçons.

3.2.2 Concaténation de tronçons

Il existe une méthode générale de composition de systèmes Hamiltoniens à ports en représentation noyau, présentée dans [23]. La mise en pratique de cette méthode est notamment possible en utilisant l'algorithme de décomposition en valeurs singulières (SVD).

Ici, puisque le système reste de taille raisonnable et que l'on connaît les relations qui soutiennent la structure de Dirac, on peut directement écrire la structure de Dirac du système composé de 3 sections, et en déduire une formule plus générale pour la construction de la structure de Dirac d'un conduit vocal décomposé en n sections.

Pour un nombre N de tronçons, on trouve alors la structure de Dirac suivante, comprenant $8N + 2$ lignes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & \\ & & & \mathbf{I} & \\ & & & & \mathbf{I} \\ & & & & & \mathbf{I} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_l \\ \dot{v}_r \\ \dot{\pi}_y \\ \dot{m} \\ \dot{h} \\ w_0 \\ w_1 \\ v_{ext}^w \\ q_{ext}^L \\ q_{ext}^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top & & \mathbf{C} & & & & \\ & & & \mathbf{D} & & \mathbf{C} & & \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & & & \mathbf{I} & & & \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & & & & & & \\ & & -\mathbf{I} & & & & & \\ & & & -\mathbf{I} & & & & \\ \mathbf{G}_l & & & & \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{G}_r & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \\ v_y \\ \Psi \\ F_w \\ z_{w0} \\ z_{w1} \\ F_{ext}^w \\ \Psi_{ext}^L \\ \Psi_{ext}^R \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{8N+2}, \quad (3.2)$$

avec les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1,N-1} \\ \mathbf{0}_{N-1,1} & -\mathbf{I}_{N-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1,1} & \mathbf{I}_{N-1} \\ \mathbf{0}_{1,1} & \mathbf{0}_{1,N-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,N-1} \\ \mathbf{0}_{N-1,1} & \mathbf{0}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= -\mathbf{I} + \mathbf{B} \\ \mathbf{G}_l &= [1, \mathbf{0}_{N-1}] \\ \mathbf{G}_r &= [\mathbf{0}_{N-1}, -1] \end{aligned}$$

Les flux et efforts marqués en gras dans (3.1) sont des vecteurs de taille N , regroupant un type de flux ou d'efforts pour tous les tronçons : $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$.

Cette approche, bien qu'en apparence plus fastidieuse à mettre en place, permet de mieux comprendre la signification de la structure de Dirac du système, et ne nécessite pas de nouveau calcul de la structure à chaque simulation. Au contraire, pour N tronçons, la méthode décrite dans [23] nécessite d'utiliser n fois l'algorithme de SVD, ce qui peut s'avérer coûteux. De plus, elle peut aboutir à une représentation noyau relâchée (« *relaxed kernel representation* » en anglais, voir [Proposition 1.4.1](#)), et donc augmenter la taille du système.

L'approche de [23] reste cependant très intéressante car elle est applicable à n'importe quel système Hamiltonien à ports en formulation noyau, et serait donc à privilégier pour tester la méthode de simulation développée sur des modèles de l'appareil vocal où les tronçons seraient plus complexes, et une telle formule explicite difficile à calculer.

Conclusion et perspectives

Conclusion Ce rapport a permis de présenter un formalisme – les systèmes Hamiltoniens à ports – et d’étudier en particulier une de ses formulations générales, la représentation noyau. Cette représentation permet de décrire des systèmes physiques avec contraintes sans augmenter la taille du système d’équations. La méthode numérique PM, tirée de [17] a pu être étendue à cette représentation, et a été utilisée avec succès pour simuler un circuit LLC.

L’objectif initial de simuler l’appareil vocal n’a pas été atteint, mais c’est bien lui qui a motivé l’étude sur la formulation noyau, dans laquelle on sait que sa modélisation se déploie naturellement [24]. Aussi, ce stage a dû se concentrer, avec succès, sur de premiers travaux théoriques et sur l’élaboration d’une méthode numérique. Cette méthode respecte le bilan énergétique du système pour chaque trame, et en présence de contraintes, elle est plus rapide que son équivalent en représentation différentielle-algébrique semi-explicite. L’ordre de précision de la méthode doit encore être prouvé, mais les simulations numériques permettent déjà d’émettre des hypothèses sur cet ordre, aiguillant ainsi la preuve théorique.

Perspectives La suite directe de ce travail, amorcé en chapitre 3, est de simuler le modèle de conduit vocal à constante localisée de [24], puis le modèle complet (incluant le larynx).

Un travail complémentaire pourrait être réalisé sur l’extension de la méthode numérique, afin de permettre notamment :

- la résolution numérique d’équations aux dérivées partielles, afin de simuler un modèle non discrétisé spatialement.
- la simulation de systèmes dont la structure de Dirac dépend de l’état.

Notons que d’autres formulations implicites des systèmes Hamiltoniens à ports existent également comme la représentation « descripteurs » [15], avec des travaux en cours pour la création d’une méthode numérique également basée sur la projection temporelle sur une base de fonctions continues [5].

Enfin, d’autres formalismes temps-espace existent (formulation 4D dite covariante [18]) garantissent des invariants physiques en plus du bilan de puissance. Il pourrait être utile d’étendre nos travaux à ce cadre de physique passive relativiste.

Annexe A

Preuves

On définit les objets suivants pour l'entièreté du chapitre :

Soient \mathcal{F} un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ son dual et $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$. Soit \mathcal{V} un espace vectoriel de dimension finie.

Soient les applications linéaires $E \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ et leurs adjoints au sens du produit dual $E^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$ et $F^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{F}^*)$, tels que

$$\begin{aligned} (i) \quad & F \circ E^* + E \circ F^* = 0, \\ (ii) \quad & \text{rg}[F + E] = n, \end{aligned}$$

Soit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ définie par

$$\begin{aligned} B: \mathcal{F} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{V} \\ (e, f) &\mapsto E(e) + F(f) = Ee + Ff. \end{aligned}$$

Dans la littérature [22, 23, 17], on retrouve ces applications linéaires F et E (ou leur équivalent en coordonnées), mais le travail réalisé sur B est une initiative de ce stage. On prouve dans la section suivante que B admet un adjoint au sens de la forme bilinéaire sur \mathcal{B} , avant de l'utiliser par la suite dans la preuve de l'équivalence entre représentation noyau et image A.2.2.

A.1 Existence et unicité de l'adjoint pour une forme bilinéaire non dégénérée mais non définie positive

Démontrons que B possède un unique adjoint B^* au sens de la forme bilinéaire sur $\mathcal{B} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. Existence de l'adjoint :

Soient $\lambda \in \mathcal{V}^*$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$.

D'après le théorème de représentation de Riesz, on identifie \mathcal{V} et \mathcal{V}^* , et on utilise une base \mathbb{B} de \mathcal{V} et sa base duale \mathbb{B}^* comme base de \mathcal{V}^* .

On note alors $\boldsymbol{\lambda}$ la représentation matricielle de λ dans \mathbb{B}^* et \mathbf{b} la représentation matricielle de \mathbf{b} dans une base $\mathbb{B}_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} .

$$\langle \lambda | \mathbf{Bb} \rangle_{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Bb} = \boldsymbol{\lambda}^T \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{M}}_{\mathbf{I}} \mathbf{b} = (\mathbf{M} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{M} \mathbf{b} := \langle \langle \mathbf{B}^* \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{b} \rangle \rangle$$

On définit un ¹ adjoint B^* par sa représentation matricielle $\mathbf{B}^* = \mathbf{M} \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{B}^* : \lambda \mapsto |\mathbb{B}_{\mathcal{B}}\rangle \mathbf{M} \mathbf{B}^T \langle \mathbb{B}_{\mathcal{V}}^* | \lambda \rangle$$

1. Il s'agit de l'unique adjoint en réalité cf preuve d'unicité.

Unicité : Soit C, D deux adjoints de B :

$$\forall \lambda \in \mathcal{V}^*, \forall \mathbf{b} \in \mathbf{B}, \quad \langle \lambda | \mathbf{Bb} \rangle = \langle \langle C\lambda, \mathbf{b} \rangle \rangle = \langle \langle D\lambda, \mathbf{b} \rangle \rangle$$

,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle \langle C\lambda, \mathbf{b} \rangle \rangle - \langle \langle D\lambda, \mathbf{b} \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \langle (C - D)\lambda, \mathbf{b} \rangle \rangle = 0 \\ \Rightarrow \forall \lambda \in \mathcal{V}^*, \quad (C - D)\lambda = 0 \quad \text{car } \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \text{ est non-dégénérée} \\ &\Rightarrow C = D \end{aligned}$$

□

Expression explicite de l'adjoint :

Proposition A.1.1. *L'adjoint B^* de B est donné par*

$$\begin{aligned} B^* : \mathcal{V}^* &\rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{E} \\ \lambda &\mapsto (E^*(\lambda), F^*(\lambda)). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathcal{V}^*$ et $\mathbf{b} = (f, e) \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} \langle B^*\lambda, \mathbf{b} \rangle_{\mathcal{B}} &:= \langle \lambda | \mathbf{Bb} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle \lambda | \mathbf{Ff} + \mathbf{Ee} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle \lambda | \mathbf{Ff} \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \lambda | \mathbf{Ee} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle F^*\lambda | f \rangle + \langle e | E^*\lambda \rangle \\ &= \langle \langle (F^*\lambda, E^*\lambda), (f, e) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Par unicité de l'adjoint, on a $B^* = (E^*, F^*)$.

□

A.2 Représentation noyau et image d'une structure de Dirac

Dans cette partie, on démontre que les représentations noyau et images définissent bien des structures de Dirac, et satisfont donc bien le bilan de puissance :

$$\langle e | f \rangle = 0.$$

On peut trouver des démonstrations très succincte *en coordonnées* dans [23], mais les démonstrations suivantes, plus détaillées et sous forme *intrinsèque* ont été réalisées durant ce stage.

A.2.1 Représentation image et structure de Dirac

On cherche à démontrer la propriété 1.4.1, c'est-à-dire que la représentation image définit bien une structure de Dirac.

Démonstration. Intrinsèque Soient \mathcal{F} un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ son dual et $\mathcal{B} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$. Soit \mathcal{V} un espace vectoriel de dimension finie.

Soient les applications linéaires $E \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ et leurs adjoints au sens du produit dual $E^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$ et $F^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^*, \mathcal{F}^*)$, tels que

$$\begin{aligned} (i) \quad &F \circ E^* + E \circ F^* = 0, \\ (ii) \quad &\text{rg}[F + E] = n, \end{aligned}$$

définissant

$$\mathcal{D} = \{(f, e) \in \mathcal{B} \mid f = E^*\lambda, \quad e = F^*\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathcal{V}^*\},$$

★

Afin de démontrer que \mathcal{D} définit bien une structure de Dirac, d'après la Proposition 1.2.1, il suffit de montrer que le bilan de puissance est nul pour tout couple $(f, e) \in \mathcal{D}$, et que \mathcal{D} est de dimension n .

Bilan de puissance en représentation image Soit $(f, e) \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle e | f \rangle &\stackrel{(a)}{=} \langle F^* \lambda | E^* \lambda \rangle \stackrel{(b)}{=} \langle \lambda | F \circ E^* \lambda \rangle \stackrel{(c)}{=} \langle \lambda | -E \circ F^* \lambda \rangle \stackrel{(d)}{=} -\langle E^* \lambda | F^* \lambda \rangle \\ &= -\langle F^* \lambda | E^* \lambda \rangle = 0, \end{aligned}$$

avec (a) par définition de \mathcal{D} , (b) par définition de F^* , (c) la condition (i) sur F et E , (d) par définition de E^* .
On a donc montré que $\forall (f, e) \in \mathcal{D}, \langle e | f \rangle = 0$.

Dimension de \mathcal{D} On note $B = F + E$, de sorte que $\text{rg}(B) = n$ et $\mathcal{D} = \text{im}(B^*)$.
Montrons d'abord que $\text{rg}(B^*) = \text{rg}(B)$.

Preuve. Puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ est non dégénérée, pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a

$$\dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{A}^{\perp}) + \dim(\underbrace{\mathcal{B}^{\perp} \cap \mathcal{A}}_{=\{0_{\mathcal{B}}\}}) = \dim(\mathcal{B}) = 2n,$$

en particulier pour $\mathcal{A} = \text{im}(B^*)$,

$$\text{rg}(B^*) + \dim(\text{im}(B^*)^{\perp}) = \dim(\mathcal{B}).$$

De plus, toujours par non dégénérescence de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$,

$$\ker(B) = (\text{im}(B^*))^{\perp}.$$

Alors,

$$\text{rg}(B^*) + \dim(\ker(B)) = \dim(\mathcal{B}),$$

et d'après le théorème du rang,

$$\text{rg}(B) + \dim(\ker(B)) = \dim(\mathcal{B}).$$

On en déduit que $\text{rg}(B^*) = \text{rg}(B)$. ■

$\text{rg}(B) = n$ d'après la condition (ii), donc $\text{rg}(B^*) = n$, et \mathcal{D} est de dimension n .

\mathcal{D} satisfait le bilan de puissance, et est de dimension n , donc \mathcal{D} définit bien une structure de Dirac. □

A.2.2 Équivalence représentations noyau et image

Sachant que la représentation image définit une structure de Dirac, il suffit de prouver que les représentations image et noyau sont équivalentes pour montrer que la représentation noyau définit également une structure de Dirac.

On cherche donc à prouver que $\text{im}(B^*) = \ker(B)$.

Montrons d'abord que

$$\text{im}(B^*) \subset \ker(B). \tag{A.1}$$

Démonstration. Soit $b_{im} = (f_{im}, e_{im}) \in \text{im}(B^*)$. Soit $\lambda_{im} \in \mathcal{V}^*$ tel que $b_{im} = B^* \lambda_{im}$.

D'après la Proposition A.1.1, $f_{im} = E^* \lambda_{im}$ et $e_{im} = F^* \lambda_{im}$.

Soit $\lambda \in \mathcal{V}^*$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda | B b_{im} \rangle_{\mathcal{V}} &= \langle \lambda | B B^* \lambda_{im} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle B^* \lambda, B^* \lambda_{im} \rangle_{\mathcal{B}} \\ &= \langle (E^*(\lambda), F^*(\lambda)), (E^*(\lambda_{im}), F^*(\lambda_{im})) \rangle \\ &= \langle \lambda_{im} | F \circ E^*(\lambda) \rangle_{\mathcal{V}} + \langle \lambda | F \circ E^*(\lambda_{im}) \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle \lambda_{im} | \underbrace{(E \circ F^* + F \circ E^*)}_{=0 \text{ d'après (i)}}(\lambda) \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathcal{V}^*, \langle \lambda | B b_{im} \rangle_{\mathcal{V}} = 0$, donc $b_{im} \in \ker(B)$. □

On a déjà montré que $\text{rg}(\mathbf{B}^*) = \text{rg}(\mathbf{B}) = n$, et $\dim(\ker(\mathbf{B})) + \text{rg}(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{B}) = 2n$ donc

$$\dim(\ker(\mathbf{B})) = n = \text{rg}(\mathbf{B}^*). \quad (\text{A.2})$$

On déduit des équations (A.1) et (A.2) que

$$\text{im}(\mathbf{B}^*) = \ker(\mathbf{B}) \quad (\text{A.3})$$

Bibliographie

- [1] John Charles BUTCHER. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2016.
- [2] Jean-Baptiste CAMPESATO. « Dualité : Résultats sur la dimension de l'espace dual ». In : (2009).
- [3] Vincent DUINDAM et al. *Modeling and Control of Complex Physical Systems*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN : 978-3-642-03195-3 978-3-642-03196-0. DOI : [10.1007/978-3-642-03196-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03196-0). URL : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-03196-0>.
- [4] Antoine FALAIZE et Thomas HÉLIE. « Passive Guaranteed Simulation of Analog Audio Circuits : A Port-Hamiltonian Approach ». In : *Applied Sciences* 6.10 (24 sept. 2016), p. 273. ISSN : 2076-3417. DOI : [10.3390/app6100273](https://doi.org/10.3390/app6100273).
- [5] Jan GIESELMANN, Attila KARSAI et Tabea TSCHERPEL. *Energy-Consistent Petrov-Galerkin Time Discretization of Port-Hamiltonian Systems*. 18 avr. 2024. arXiv : [2404.12480](https://arxiv.org/abs/2404.12480) [cs, math]. URL : <http://arxiv.org/abs/2404.12480>. Prépubl.
- [6] Goran GOLO et al. « Hamiltonian Discretization of Boundary Control Systems ». In : *Automatica* 40.5 (mai 2004), p. 757-771. ISSN : 00051098. DOI : [10.1016/j.automatica.2003.12.017](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2003.12.017).
- [7] Bernard GOSTIAUX. « Cours de mathématiques spéciales . Tome 1, algèbre / bernard gostiaux ». In : *Cours de mathématiques spéciales . Tome 1 . Algèbre*. Mathématiques. Paris : Presses universitaires de France, 1993. ISBN : 2-13-045835-1.
- [8] Nicholas HALE et Alex TOWNSEND. « Fast and Accurate Computation of Gauss–Legendre and Gauss–Jacobi Quadrature Nodes and Weights ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 35.2 (2013), A652-A674. DOI : [10.1137/120889873](https://doi.org/10.1137/120889873). eprint : <https://doi.org/10.1137/120889873>.
- [9] Hanif HEIDARI et H. ZWART. « Port-Hamiltonian Modelling of Nonlocal Longitudinal Vibrations in a Viscoelastic Nanorod ». In : *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 25.5 (3 sept. 2019), p. 447-462. ISSN : 1387-3954, 1744-5051. DOI : [10.1080/13873954.2019.1659374](https://doi.org/10.1080/13873954.2019.1659374).
- [10] Thomas HÉLIE. « Elementary tools on Port-Hamiltonian Systems with applications to audio/acoustics ». Doctoral. Lecture. Fauenciemsee, Germany, mars 2022. URL : <https://hal.science/hal-03986168>.
- [11] N. LOPES, T. HÉLIE et A. FALAIZE. « Explicit Second-Order Accurate Method for the Passive Guaranteed Simulation of Port-Hamiltonian Systems ». In : *IFAC-PapersOnLine* 48.13 (2015), p. 223-228. ISSN : 2405-8963. DOI : [10.1016/j.ifacol.2015.10.243](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.10.243).
- [12] Nicolas LOPES. « Approche Passive Pour La Modélisation, La Simulation et l'étude d'un Banc de Test Robotisé Pour Les Instruments de Type Cuivre ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, juin 2016. URL : <https://theses.hal.science/tel-01400695>.
- [13] Nicolas LOPES et Thomas HÉLIE. « Energy Balanced Model of a Jet Interacting with a Brass Player's Lip ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 102.1 (2016), p. 141-154. DOI : [10.3813/AAA.918931](https://doi.org/10.3813/AAA.918931).
- [14] B.M. MASCHKE et A.J. van der SCHAFT. « Port-Controlled Hamiltonian Systems : Modelling Origins and Systemtheoretic Properties ». In : *IFAC Proceedings Volumes* 25.13 (juin 1992), p. 359-365. ISSN : 14746670. DOI : [10.1016/S1474-6670\(17\)52308-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)52308-3).
- [15] Volker MEHRMANN et Riccardo MORANDIN. *Structure-Preserving Discretization for Port-Hamiltonian Descriptor Systems*. 25 mars 2019. arXiv : [1903.10451](https://arxiv.org/abs/1903.10451) [math]. URL : <http://arxiv.org/abs/1903.10451>. Prépubl.
- [16] Rémy MULLER et Thomas HÉLIE. « Power-Balanced Modelling Of Circuits As Skew Gradient Systems ». In : *21 st International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-18)*. Aveiro, Portugal, sept. 2018.

- [17] Remy MÜLLER. *Time-Continuous Power-Balanced Simulation of Nonlinear Audio Circuits : Realtime Processing Framework and Aliasing Rejection*. Sorbonne Université, juill. 2021. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03349682>.
- [18] Benoît PANICAUD et al. « Consistent hypo-elastic behavior using the four-dimensional formalism of differential geometry ». In : *Acta Mechanica* 227.3 (mars 2016), p. 651-675. DOI : [10.1007/s00707-015-1470-8](https://doi.org/10.1007/s00707-015-1470-8).
- [19] Ramy RASHAD et al. « Twenty Years of Distributed Port-Hamiltonian Systems : A Literature Review ». In : *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 37.4 (16 déc. 2020), p. 1400-1422. ISSN : 0265-0754, 1471-6887. DOI : [10.1093/imamci/dnaa018](https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa018).
- [20] Müller REMY et Thomas HÉLIE. « Fully-implicit algebro-differential parametrization of circuits ». In : *23rd International Conference on Digital Audio Effects (DAFx-20)*. Vienne, Austria, sept. 2020.
- [21] Vladimir SALNIKOV et Aziz HAMDOUNI. « From modelling of systems with constraints to generalized geometry and back to numerics ». In : *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 99.6 (avr. 2019), e201800218. DOI : [10.1002/zamm.201800218](https://doi.org/10.1002/zamm.201800218).
- [22] Abraham Jan van der SCHAFT et Dimitri JELTSEMA. *Port-Hamiltonian Systems Theory : An Introductory Overview*. Foundations and Trends in Systems and Control 1, 2/3 (2014). Boston Delft : Now, 2014. 216 p. ISBN : 978-1-60198-786-0.
- [23] Arjan VAN DER SCHAFT. *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Communications and Control Engineering. Cham : Springer International Publishing, 2017. ISBN : 978-3-319-49991-8 978-3-319-49992-5. DOI : [10.1007/978-3-319-49992-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-49992-5). URL : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-49992-5>.
- [24] Victor WETZEL. « Lumped Power-Balanced Modelling and Simulation of the Vocal Apparatus : a Fluid-Strucutre Interaction Approach ». Theses. Sorbonne Université, déc. 2021. URL : <https://theses.hal.science/tel-03715371>.

Résumé

Un des principes physiques fondamentaux, y compris pour les systèmes multiphysiques, est le respect du bilan de puissance et la passivité : à tout instant, la somme de la puissance reçue par chaque composant du système (entrées et sorties comprises) doit être nulle (et, hors de l'environnement extérieur, aucun composant ne peut spontanément créer d'énergie). Les systèmes Hamiltoniens à ports (SHP) donnent un cadre qui garantit par principe le respect du bilan de puissance. Ils sont décrits par une structure de Dirac (connexion inter composants à routage conservatif), et des lois pour chaque composant du système. Ce cadre admet plusieurs formulations, dont la représentation noyau, qui permet de décrire des systèmes avec contraintes sans augmenter la taille du système d'équations.

Pour profiter d'un tel formalisme lors de la simulation du système, il faut disposer d'une méthode numérique respectant le bilan de puissance. La méthode de projection temporelle RPM (en anglais « regular power balanced method »), introduite dans la thèse de Rémy Müller, est une méthode numérique basée sur la projection temporelle des trajectoires des flux et des efforts sur une base de fonctions continues. Elle respecte la passivité, et l'ordre de précision du schéma et l'ordre de régularité des trajectoire peuvent être choisis. Ce rapport décrit le travail réalisé pour adapter la méthode RPM à la représentation noyau des SHP, en conservant la propriété de passivité, et d'ordre de précision (mais sans traiter l'ordre de régularité). La nouvelle méthode ainsi obtenue, appelée PM noyau, respecte également le bilan énergétique à l'échelle de chaque trame.

Cette méthode est particulièrement adaptée à la simulation de systèmes avec contraintes comme un circuit LLC série. Sur un tel circuit, la méthode PM noyau est plus rapide que la méthode PM dans sa forme originale, et converge vers la même solution.

Ce travail est voué à traiter la modélisation du conduit vocal, pour lequel la formulation noyau est impliquée.

Mots-clés : Systèmes Hamiltoniens à ports, représentation noyau, méthode de projection temporelle, simulation numérique, structure de Dirac, contraintes, bilan de puissance.

Abstract

One of the fundamental physical principles is the respect of the power balance and passivity : at any given moment, the sum of the power received by each component of the system (including inputs and outputs) must be zero (and, apart from the external environment, no component can spontaneously create energy). Port-Hamiltonian Systems (PHS) provide a framework that inherently guarantees the respect of the power balance. They are described by a Dirac structure (representing conservative inter-component connections) and laws for each component of the system. This framework admits several formulations, including the kernel representation, which allows for the description of systems with constraints without increasing the size of the system of equations.

To take advantage of such formalism during system simulation, a numerical method that respects the power balance is required. The temporal projection method « regular power balanced method » (RPM), introduced in Rémy Müller's thesis, is a numerical method based on the temporal projection of the trajectories of flows and efforts onto a basis of continuous functions. It respects passivity, and both the order of accuracy of the scheme and the regularity order of the trajectories can be chosen. This report describes the work carried out to adapt the RPM method to the kernel representation of PHS, maintaining the property of passivity and the order of accuracy (but without addressing the regularity order). The new method thus obtained, called kernel PM, also respects the energy balance over each frame.

This method is particularly well-suited for the simulation of systems with constraints, such as a series LLC circuit. On such a circuit, the kernel PM method is faster than the original PM method and converges to the same solution.

This work is directed towards the simulation of the vocal tract, for which the kernel formulation is involved.

Keywords : Port-Hamiltonian systems, kernel representation, temporal projection method, numerical simulation, Dirac structure, constraints, power balance.