

**Système dynamique non linéaire de production de  
signaux de source glottique**  
Rapport de stage du Master ATIAM  
IRCAM

Mathias LE BORGNE

20 août 2012

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Contexte et enjeux de la synthèse vocale . . . . .	3
1.2	Modèle de synthèse vocale . . . . .	3
1.2.1	Principaux modèles de synthèse . . . . .	3
1.2.2	Avantages des modèles Source-Filtre . . . . .	3
1.3	Source glottique . . . . .	4
1.3.1	Nature et modèles classiques de signaux de source glottique . . . . .	4
1.3.2	Diversité et Variabilité de signaux d'aire glottique . . . . .	4
1.4	Modéliser la variabilité . . . . .	6
1.4.1	limites du "bruit exogène" . . . . .	6
1.4.2	Une alternative : les dynamiques chaotiques . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modèle de production de signaux à dynamique chaotique</b>	<b>8</b>
2.1	Motivations . . . . .	8
2.2	Modèle de Lur'e à temps discret . . . . .	8
2.2.1	Notations . . . . .	8
2.2.2	Modèle discret . . . . .	9
2.2.3	Forme canonique de représentation d'états . . . . .	10
2.2.4	Modèle de synthèse paramétrique . . . . .	10
2.3	Quelques exemples de synthèse . . . . .	10
2.3.1	Essais . . . . .	10
2.3.2	Modification d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2 . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Un algorithme général d'identification des paramètres du système de Lur'e</b>	<b>14</b>
3.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	14
3.2	Identification linéaire . . . . .	15
3.3	Mesure de la qualité de l'identification linéaire . . . . .	15
3.3.1	Par prédiction . . . . .	15
3.3.2	En utilisant la matrice de corrélation . . . . .	16
3.4	Contraintes sur les paramètres . . . . .	16
3.5	Résumé de l'algorithme de calcul de la fonction d'objectif . . . . .	17
3.6	Résultats . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Utilisation de modèles physiques</b>	<b>20</b>
4.1	Modèle à une masse . . . . .	20
4.1.1	Modèle Théorique . . . . .	20
4.1.2	Adimensionnement et paramètres réduits . . . . .	21
4.1.3	Equation à une variable et une non-linéarité . . . . .	22
4.1.4	Propriétés remarquables du système . . . . .	22

4.1.5	Système de Lur'e (à temps continu)	23
4.2	Modèle à deux masses	24
4.2.1	Forces de pression	24
4.3	Adaptation à la structure des systèmes de Lur'e	26
4.3.1	Approximations	26
4.3.2	Cas où $\psi_1 = \psi_2$	27
4.3.3	Application au modèle à deux masses	27
4.3.4	Obtention d'une équation différentielle unique	28
4.3.5	Système de Lur'e (à temps continu)	28
4.3.6	Discrétisation	29
4.4	Utilisation pour la synthèse	29
4.4.1		29
4.4.2	Analyse des résultats	30
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Modèles Source-Filtre</b>	<b>33</b>
A.1	Vue d'ensemble du modèle	33
<b>B</b>	<b>Modèle de Lur'e à temps continu</b>	<b>34</b>
B.1	Formulation	34
B.2	Méthode de discrétisation à l'aide de l'approximation des trapèzes	34
<b>C</b>	<b>Complément sur l'algorithme d'identification paramétrique</b>	<b>36</b>
C.1	Recuit Simulé	36
C.1.1	Présentation	36
C.1.2	Détails de l'algorithme	36
C.2	Bases de fonctions pour la non-linéarité $\psi$	38
C.2.1	Polynômes de Tchebychev	38
C.2.2	Smoothed Piecewise linear Functions	38
<b>D</b>	<b>Compléments sur les modèles physiques</b>	<b>40</b>
D.1	Exemple de mise sous la forme d'un système de Lur'e	40

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte et enjeux de la synthèse vocale

La synthèse vocale est de plus en plus présente dans notre quotidien. Autrefois cantonnée à certains services relativement simples (traitement automatique d'appels téléphoniques, annonces dans des lieux publics), elle a aujourd'hui une place chaque fois qu'il est nécessaire—ou simplement utile—de remplacer ou de compléter des informations données par un support visuel.

Depuis quelques années, les solutions de synthèse de parole entièrement automatiques à partir d'un texte écrit commencent à devenir convaincantes. Couplées à un module de reconnaissance automatique de la parole et à une intelligence artificielle adaptée, ces technologies de synthèse vocale pourraient bien constituer un tournant dans l'évolution des interfaces homme-machine. L'intérêt suscité par l'introduction massive de ce type d'interfaces vocales auprès du grand public (sur des téléphones mobiles par exemple) est en ce sens très prometteur.

### 1.2 Modèle de synthèse vocale

#### 1.2.1 Principaux modèles de synthèse

Dans le cadre de la synthèse de la voix, on souhaite pouvoir reproduire différents types de voix, isoler et manipuler certaines de ses caractéristiques, etc. Il est donc nécessaire d'analyser un signal réel pour le resynthétiser, après l'avoir éventuellement transformé. Dans ce but, différentes approches sont possibles :

**La concaténation d'unités de sons :** ce modèle est probablement le plus performant à l'heure actuelle, mais il nécessite d'enregistrer un grand nombre d'extraits sonores ;

**Les modèles de signaux :** source-filtre, sinusoides plus bruit, formes d'ondes formantiques, ils peuvent être limités par le manque de naturel dû à l'absence de prise en compte de certains phénomènes physiques propres à la voix ;

**Les modèles physiques :** généralement plus complexes que les modèles précédent, ils peuvent être assez réalistes mais sont très difficiles à inverser et à contrôler.

#### 1.2.2 Avantages des modèles Source-Filtre

Parmi ces possibilités, les modèles sources-filtres montrent un certain nombre de qualités :

- ils modifient directement le spectre de la source (voir annexe A), ce qui est pertinent d'un point de vue perceptif, pour le cas des formants par exemple ;
- ils sont plus simples (en terme d'analyse, de contrôle et de temps de calcul) que les modèles acoustiques en traitant la source (les cordes vocales) et le filtre (le conduit vocal) de façon

indépendante, et ne nécessitent pas de grandes bases d'enregistrement comme pour les modèles par concaténation ;

- des méthodes d'estimation de paramètres ont été développées (voir notamment [Degottex (2010)]);
- il est possible d'informer les modèles source-filtres par des considérations physiques, notamment pour représenter les couplages entre certaines parties de l'appareil vocal (c'est notamment l'objet d'un travail de thèse en cours mené par Thomas Hézard [Hezard *et al.* (2012)]).

## 1.3 Source glottique

Dans ce stage, nous nous sommes intéressés à la synthèse de signaux de source glottique, dans le cadre de modèles sources-filtre prenant ou non en compte l'interaction entre la source glottique et le filtre vocal.

### 1.3.1 Nature et modèles classiques de signaux de source glottique

D'un point de vue physique, les signaux correspondant à la source glottique peuvent être de plusieurs types :

- l'aire glottique ;
- le débit glottique ;
- la dérivée de l'un ou de l'autre.

Différents modèles ont été développés pour décrire et synthétiser les signaux de source glottique. Ils prennent en compte en général le débit glottique et sa dérivée (comme par exemple le modèle LF [Fant (1997), Fant *et al.* (1985), Doval *et al.* (2006)]). En toute rigueur le débit glottique est une fonction de l'aire glottique et de la pression subglottique. Les modèles source-filtre utilisent plutôt l'aire glottique [(Degottex, 2010, p.33)]. Ce sont donc ces signaux, ainsi que leur dérivée que nous avons étudié (des exemples d'aire glottique et de leurs dérivées sont donnés en table 1.1).

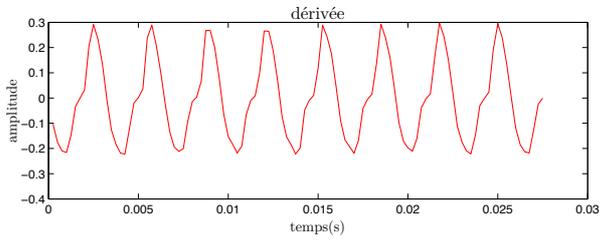
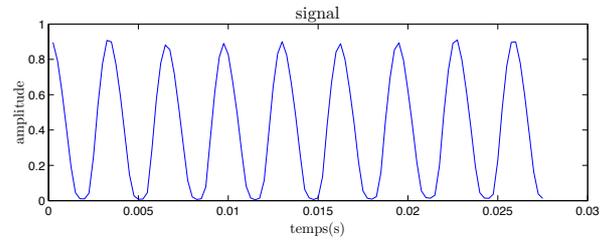
### 1.3.2 Diversité et Variabilité de signaux d'aire glottique

Les signaux de source glottique possèdent une certaine variabilité (cf. table 1.1) : tout d'abord, on observe<sup>1</sup> des différences entre les signaux de source pour différents types de voix (chuchotée ou parlée, tendue ou relâchée, etc). Cela implique un grand nombre de classes de signaux. On s'intéresse ici aux signaux pseudo-périodiques. Plus précisément, on souhaite que le signal ait une forme d'onde caractéristique et qu'il manifeste une variabilité à travers un certain nombre de réalisations. On étudiera donc des signaux où l'hypothèse de quasi-stationnarité est vérifiée (une voyelle tenue est un bon exemple). En examinant des bases de données de tels signaux, on se rend compte qu'ils manifestent une grande diversité au niveau de leurs formes d'onde caractéristiques.

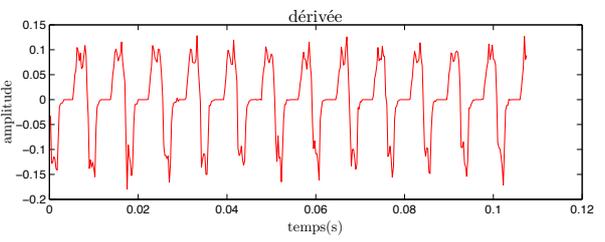
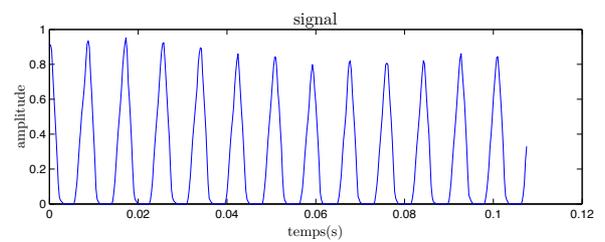
Ensuite, à l'intérieur d'un même signal, où la forme d'onde reste globalement la même, on observe une seconde variabilité entre les pseudo-périodes : des caractéristiques de la forme d'onde comme leurs durées, maxima et minima, position des passages par zéros éventuels peuvent varier. C'est cette seconde variabilité que nous nous sommes attachés à reproduire.

---

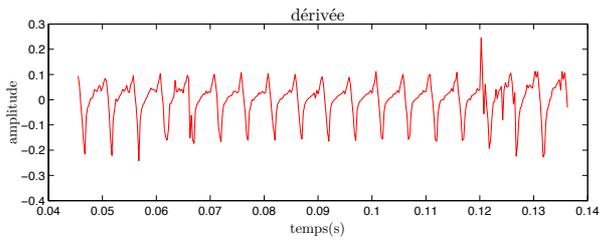
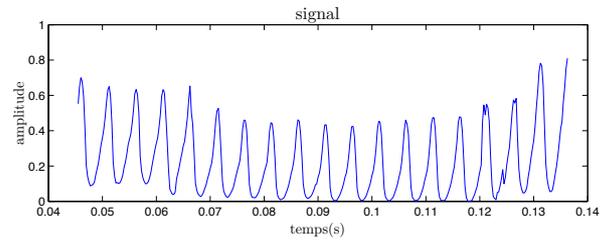
1. Gilles Degottex [Degottex (2010)] a notamment réalisé une base de données contenant des vidéos haute fréquence de cordes vocales, que nous avons utilisé lors de ce stage.



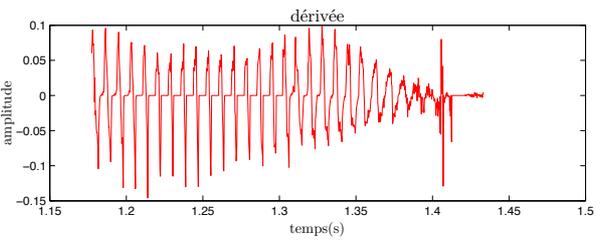
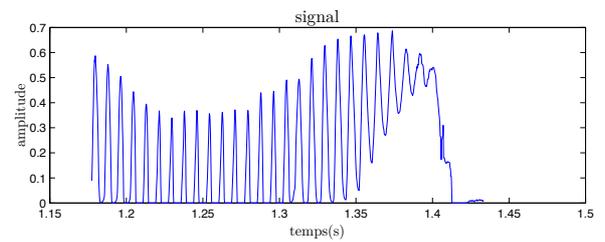
(a)



(b)



(c)



(d)

TABLE 1.1 – Exemples de signaux de source glottique : (a),(b),(c),(d) - aire glottique et sa dérivée.

## 1.4 Modéliser la variabilité

Cette partie est largement inspirée de De Feo (2001).

### 1.4.1 limites du "bruit exogène"

Les modèles de signaux pseudo-périodiques naturels les plus utilisés sont linéaires. Dans ce cadre, les fluctuations aléatoires du signal sont implicitement considérées comme le fruit d'une force extérieure, généralement modélisée par un bruit blanc gaussien<sup>2</sup>.

On peut montrer les limites de l'approche linéaire [De Feo (2001)] en examinant, pour un grand nombre de signaux pseudo-périodiques naturels, les variations des projections de chaque pseudo-période dans un modèle linéaire a priori adapté (coefficients des séries de Fourier, coefficients ARMA, etc), ainsi que les variations de la pseudo-période. Les distributions de coefficients ainsi obtenues ne correspondent manifestement pas à celles de bruits blancs gaussiens.

Si les fluctuations apparemment aléatoires du signal sont au contraire le résultat de causes internes à la dynamique du signal, il est de plus légitime de penser que cette supposition fait perdre beaucoup d'informations sur cette dynamique. Une solution est alors d'adopter un modèle non linéaire.

### 1.4.2 Une alternative : les dynamiques chaotiques

#### Une source de variabilité déterministe

Dans l'approche non linéaire, les modèles utilisés peuvent générer une certaine variabilité tout en étant entièrement déterministes. Cela signifie que l'on considère implicitement que les petites variations du signal sont conformes à la loi d'évolution du système dont il est issu, donc qu'elles sont "endogènes" au système<sup>3</sup>, et non le résultat d'un phénomène extérieur.

Les dynamiques chaotiques sont un exemple de source de variabilité issue d'un modèle non linéaire déterministe. La variabilité s'y manifeste par l'imprévisibilité du comportement à long terme due à l'instabilité locale d'un attracteur (l'exemple classique étant la météo).

Il existe plusieurs types de chaos, suivant la façon dont le chaos peut émerger d'un comportement classique. La façon la plus simple est le doublement de période<sup>4</sup> et le chaos correspondant est dit "de type Feigenbaum".

#### Chaos et pseudo-périodicité

En étudiant une famille d'attracteurs (les oscillateurs de Colpitts), on peut montrer que les chaos de type Feigenbaum inclut des signaux pseudo-périodiques où la variabilité est importante

---

2. On peut justifier ceci par le théorème central limite, qui établit que la somme d'un grand nombre de sources indépendantes de variations aléatoires est équivalente à un bruit blanc gaussien.

3. Cette hypothèse de déterminisme est étayée par plusieurs éléments. Notamment, certaines représentations tridimensionnelles comme la reconstruction à phase non minimale (*nonminimal phase reconstruction*) peuvent faire apparaître, pour des signaux pseudo-périodiques, des structures particulièrement nettes. [(De Feo, 2001, p.37)] montre que c'est le cas pour des signaux audio de voyelles, ce qui permet légitimement de penser que les signaux de source glottique auront aussi des profils tridimensionnels relativement structurés. Cependant, nous n'avons pas testé les techniques de reconstruction sur ces derniers signaux.

4. Un exemple simple de doublement de période est la suite logistique, d'équation de récurrence :

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$$

En augmentant  $\lambda$  à partir de 1, on observe des cycles de période 2, puis 4, 8, etc. jusqu'à  $\lambda_0 \simeq 3.57$  où la suite devient apériodique.

au niveau de l'amplitude, et très faible sur la pseudo-période. Ceci semble très bien correspondre à nos signaux de source glottique.

Finalement, le chaos de type Feigenbaum est à la fois suffisant pour produire des signaux périodique, et moins complexe que les autres types de chaos : c'est donc un bon candidat pour la synthèse de signaux de source glottique.

### **Analyse et synthèse**

Notre but étant de synthétiser des signaux de source glottique aussi proches que possible (dans leur forme d'onde et leur variabilité) de signaux réels, il faut alors déterminer :

- un modèle mathématique permettant la synthèse des signaux ayant des dynamiques chaotiques de type Feigenbaum (chapitre 2) ;
- une méthode d'analyse pour reproduire des signaux réels à l'aide de ce modèle (chapitre 3).

## Chapitre 2

# Modèle de production de signaux à dynamique chaotique

### 2.1 Motivations

Il existe de nombreux systèmes permettant de générer des signaux ayant une dynamique non linéaire. En suivant [De Feo (2001)], nous avons choisi le modèle de Lur'e comme modèle de synthèse. Ce modèle est bien adapté à notre problème car il permet de synthétiser n'importe quel signal chaotique dont la dynamique est de type Feigenbaum.

Il est possible de construire un modèle de Lur'e entièrement paramétrique. Le but est alors de déterminer les paramètres du modèle (analyse) tels que sa sortie puisse approcher le mieux possible un signal cible déterminé (synthèse). Plusieurs algorithmes d'identification paramétrique existent pour le modèle de Lur'e, mais ils sont souvent excessivement compliqués, ou mal adaptés à notre problème<sup>1</sup>. Nous nous sommes intéressés à l'algorithme introduit par Oscar de Feo [De Feo (2001)].

Les arguments justifiant l'utilisation des systèmes de Lur'e sont donc les suivants :

1. les signaux de source glottique sont pseudo-périodiques ;
2. cette pseudo-périodicité peut être générée par une dynamique chaotique de type Feigenbaum ;
3. les systèmes de Lur'e peuvent synthétiser tous les signaux chaotiques de type Feigenbaum ;
4. il existe un algorithme d'identification paramétrique pour le modèle de Lur'e adapté à notre problème de synthèse.

Nous détaillons à présent le modèle de Lur'e.

### 2.2 Modèle de Lur'e à temps discret

#### 2.2.1 Notations

Le modèle de Lur'e (présenté en fig.2.1) est une boucle composée d'un filtre linéaire et d'une fonction non linéaire scalaire  $\psi$ .

En l'absence de références détaillées sur les systèmes de Lur'e à temps discret, il est utile d'introduire le modèle et ses notations de façon exhaustive.

---

1. Par exemple, [Piccardi & Rinaldi (2006)] fournit un algorithme bien adapté à l'identification de paramètres physiques, mais qui se révèle inutilisable pour la synthèse (cf annexe [B.2]).

- $n \in \{0; N - 1\}$  : temps discret
- $y_n$  : sortie du modèle de Lur'e
- $r_n$  : entrée du système; nous prenons  $r_n = 0^2$ .
- $u_n$  : signal intermédiaire scalaire (entrée du filtre, sortie de la fonction non linéaire)
- $G(z)$  : filtre (linéaire); on choisit un filtre de type ARMA de coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$
- $\psi$  : fonction non linéaire<sup>3</sup> scalaire ( $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). On peut la paramétrer en choisissant  $\psi$  comme combinaison de fonctions de base  $\psi_j$  dépendant d'un ensemble de paramètres  $\{c_j\}_{j=1\dots J}$  (cf annexe C.2). Par exemple avec  $\psi_j$  les polynômes canoniques d'ordre  $j$  :

$$\psi(v) = \sum_{j=1}^J c_j \psi_j(v)$$

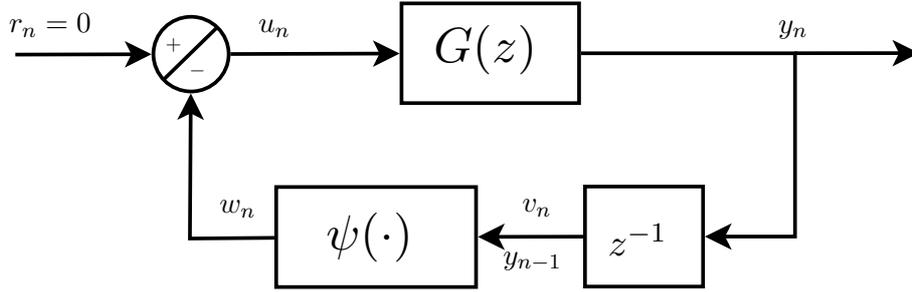


FIGURE 2.1 – Structure du modèle de Lur'e

### 2.2.2 Modèle discret

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Filtre :} \\ \text{Non-linéarité :} \\ \text{Retard :} \\ \text{Boucle :} \end{array} \right. \begin{array}{l} y_n = -\sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} + \sum_{l=0}^{L-1} b_l u_{n-l} \\ w_n = \psi(v_n) \\ v_n = y_{n-1} \\ u_n = -w_n + r_n \end{array} \quad (2.1)$$

Ceci donne l'équation de récurrence :

$$y_n = -\sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} - \sum_{l=0}^{L-1} b_l \psi(y_{n-l-1}) \quad (2.2)$$

Le filtre de la figure 2.1 a pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}} \quad (2.3)$$

Enfin, les conditions initiales sont les  $y_k$  pour  $k \in \{-K; -1\}$ . On a de cette façon un modèle entièrement paramétrique.

Ce modèle à temps discret à un équivalent en temps continu, où l'équation du filtre correspond à une équation différentielle linéaire (cf annexe B).

2. Ceci permet de simplifier le modèle sans perte de généralité par rapport à la capacité du modèle à générer l'ensemble des signaux chaotiques de type Feigenbaum.

3. A priori  $\psi$  peut être n'importe quelle fonction, mais si  $\psi$  est linéaire, on perd la spécificité des systèmes de Lur'e.

### 2.2.3 Forme canonique de représentation d'états

(2.2) est équivalente à :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= \tilde{A}X_n + \tilde{b}u_n \\ y_n &= \tilde{c}^\top X_n \\ u_n &= \psi(y_{n-1}) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_K & -a_{K-1} & -a_{K-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad X_n = \begin{bmatrix} y_{n-K+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \tilde{c}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{L-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

Notons que le retard de boucle ( $X_{n+1}$  est exprimé en fonction du passé  $X_n$ ) permet de rendre les calculs explicites.

### 2.2.4 Modèle de synthèse paramétrique

On peut alors résumer le modèle de synthèse à temps discret comme suit (voir fig.2.1) :

Pour synthétiser  $N$  valeurs de sortie du système de Lur'e :

**signal de sortie du système :**  $y_n, n \in \{0, \dots, N-1\}$

**paramètres :** – conditions initiales de la sortie :  $y_n, n \in \{-K, \dots, -1\}$

– coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$  du filtre, ordres  $K$  et  $L$

– coefficients  $\{c_j\}_{j=1\dots J}$  de la fonction non linéaire, nombre de paramètres  $J$

**équation de récurrence :**  $y_n = -\sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} - \sum_{l=0}^{L-1} b_l \psi(y_{n-l-1})$

Notons qu'il y a beaucoup de paramètres inconnus (ce qui permet en contrepartie de pouvoir synthétiser une grande variété de signaux), il va donc falloir développer une méthode d'identification paramétrique adaptée à nos signaux.

## 2.3 Quelques exemples de synthèse

On montre ici à titre d'exemple quelques signaux produits par le système de Lur'e.

### 2.3.1 Essais

En jouant "librement" avec les coefficients du filtre et la fonction non linéaire, il est facile de produire des signaux "chaotiques". La table 2.1 montre un exemple de synthèse avec des coefficients ajustés de manière empirique. Ce signal n'est pas intéressant, notamment pour deux raisons simples :

- Il ne semble pas y avoir de continuité
- On ne distingue pas de phénomène pseudo-périodique

En recherchant de manière automatique des paramètres permettant d'obtenir un signal de sortie plus "continu", on peut observer plusieurs comportements intéressants : des signaux pseudo-périodiques, des oscillations convergentes et divergentes (cf table 2.2).

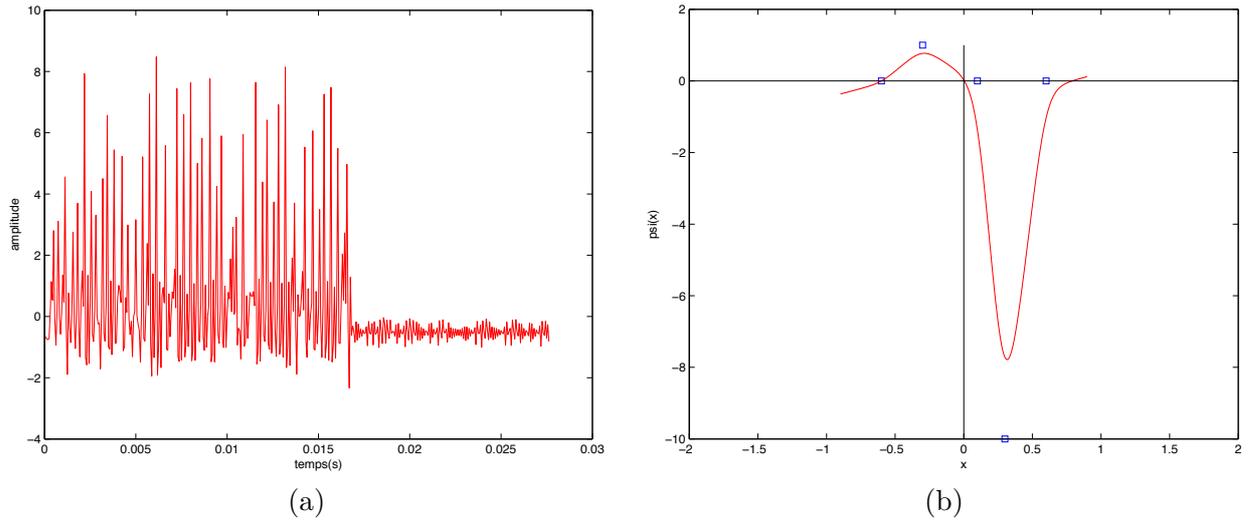


TABLE 2.1 – Synthèse empirique. (a) - Non linéarité; (b) - Signal de synthèse

### 2.3.2 Modification d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2

Si l'on examine la suite linéaire récurrente suivante :

$$y_n = 2\cos(\Theta)y_{n-1} - y_{n-2}$$

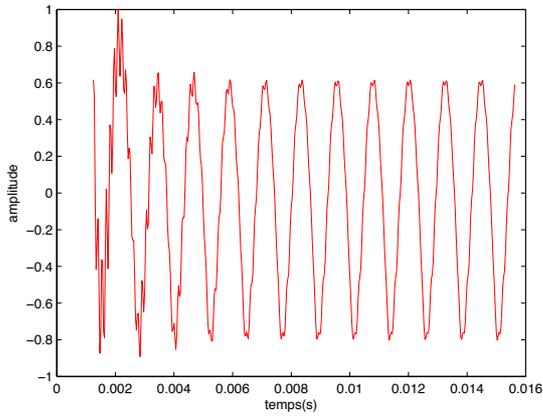
on peut calculer l'expression générale du terme  $y_n$  :

$$y_n = A\cos(n\Theta) + B\sin(n\Theta)$$

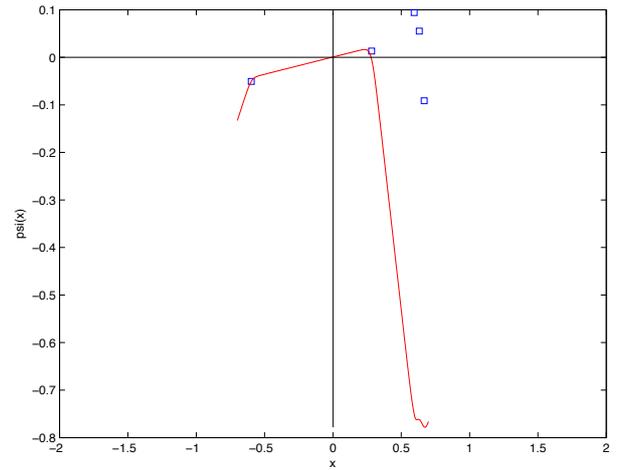
où  $A, B$  dépendent de  $y_0$  et  $y_1$ . Il s'agit d'une suite périodique. Si l'on prend alors  $\psi(x) = x$  et  $u_n = -\psi(y_{n-1})$ , on écrit :

$$y_n = 2\cos(\Theta)\psi(y_{n-1}) - y_{n-2} = -y_{n-2} - 2\cos(\Theta)u_n$$

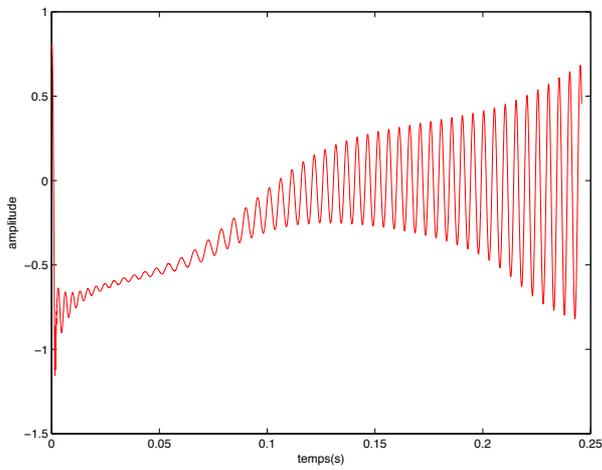
qui est bien l'équation d'un système de Lur'e, à ceci près que la "non-linéarité" est en fait l'identité. On peut alors modifier légèrement  $\psi$  pour l'écarter de l'identité (cf table 2.3, fig.(a)) : on observe alors un comportement chaotique (cf table 2.3, fig.(b)).



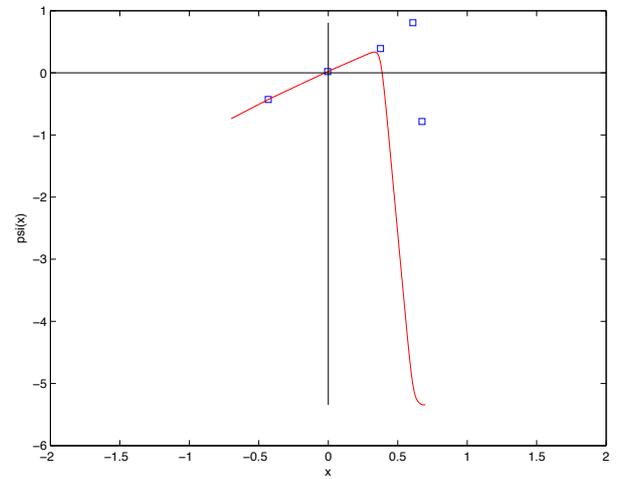
(a)



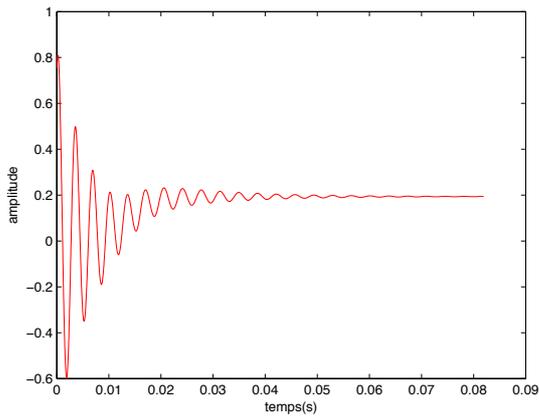
(b)



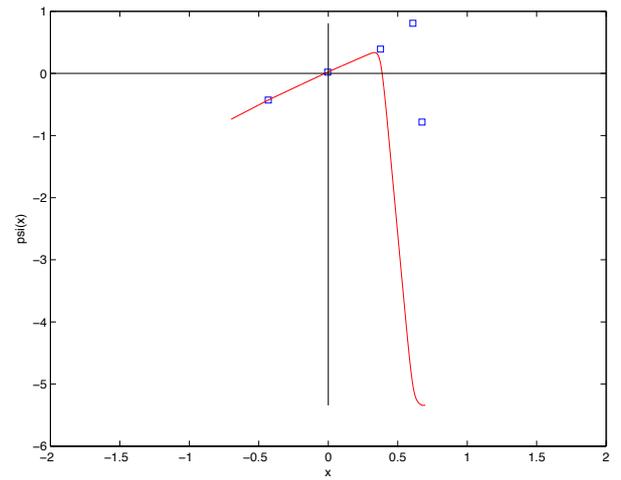
(c)



(d)

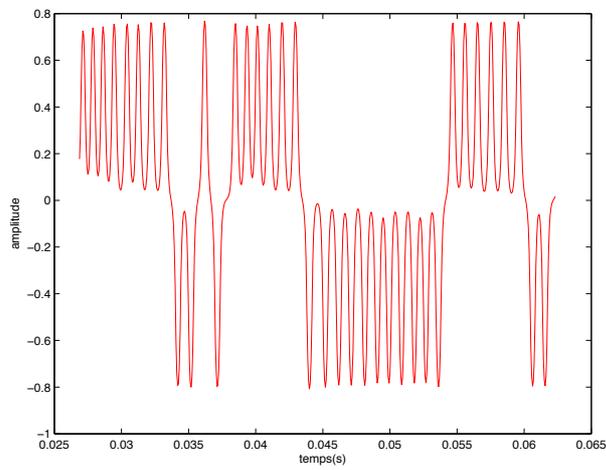


(e)

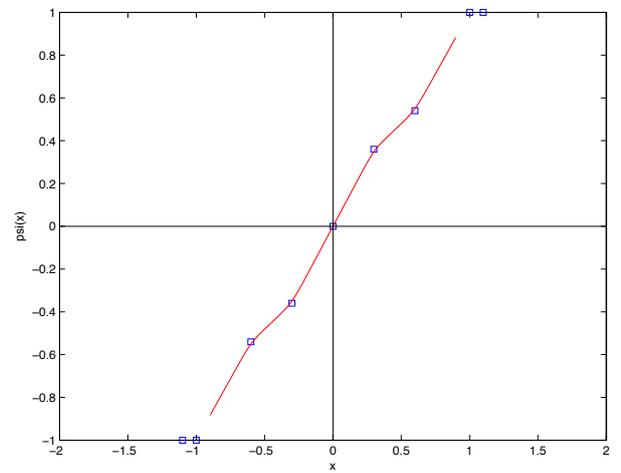


(f)

TABLE 2.2 – Synthèse empirique à l'aide d'une suite récurrente d'ordre 2 modifiée. (a),(c),(e) - Non-linéarités ; (b),(d),(f) - Signaux de synthèse



(a)



(b)

TABLE 2.3 – Synthèse empirique à l'aide d'une suite récurrente d'ordre 2 modifiée. (a) - Non linéarité; (b) - Signal de synthèse

## Chapitre 3

# Un algorithme général d'identification des paramètres du système de Lur'e

### 3.1 Présentation de l'algorithme

Nous avons vu que le modèle adopté dépendait d'un certain nombre de paramètres (les coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$  du filtre et les paramètres  $\{c_j\}_{j=1\dots J}$  de la fonction non linéaire, que l'on appellera  $C$  dans la suite). Il nous faut une méthode pour déterminer les paramètres permettant de synthétiser un signal ayant des caractéristiques similaires à celles d'un signal réel.

Il n'est pas possible d'utiliser les techniques d'identification linéaire usuelles (moindre carrés par exemple), car la non-linéarité du modèle empêche de réaliser une optimisation globale des paramètres par simple dérivation d'un critère. De même, d'autres méthodes d'optimisation envisageables se sont révélées inadaptées à notre problème [Julier & Uhlmann (2004), Slotine *et al.* (1991), Voss *et al.* (2004)].

(De Feo, 2001, p.128) propose un algorithme pour l'optimisation des paramètres du système (en associant une technique d'identification linéaire pour les coefficients du filtre et une optimisation pour les paramètres de la fonction non linéaire).

Il s'agit de construire et d'optimiser une fonction d'objectif (fonction de  $C$ , les paramètres de la fonction non linéaire, cf équation (2.2)) prenant en compte :

**une identification des paramètres du filtre linéaire** pour le  $C$  fixé, à partir du signal cible  $\hat{y}$  et de  $u = \psi_C(\hat{y})$

**une mesure de la qualité de l'identification linéaire** (terme  $f_I$ , cf 3.3) qui est d'autant plus faible que les paramètres  $C$  sont proches de ceux du système de Lur'e recherché

**des contraintes sur les paramètres** (termes  $f_{P_j}$ , cf 3.4) qui permettent d'éviter les dégénérescences de la fonction non-linéaire en une fonction linéaire, les dégénérescences de l'ordre du filtre et les régressions du filtre en retard pur.

La fonction d'objectif à optimiser s'écrira alors :

$$f_{obj}(C) = f_I(C) + \sum f_{P_j}(C)$$

On optimise cette fonction par rapport à  $C$  uniquement<sup>1</sup>, par exemple avec un algorithme

---

1. Et pas par rapport aux coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$ , Qui sont optimisés analytiquement par rapport à  $C$

d'optimisation paramétrique numérique.

## 3.2 Identification linéaire

On cherche les coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$  du filtre par une technique d'identification classique, en utilisant un modèle de type Output-error (ou ARX, ARMAX, Box-Jenkins, etc [Ljung (1999)]), et un critère de moindres carrés. Si l'on réalise l'identification sur un signal d'entrée  $u_n$ ,  $n \in \{K, \dots, N\}$ , et un signal de sortie  $y_n$ ,  $n \in \{0, \dots, N\}$ , on cherche les  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$  vérifiant (2.2), soit  $\forall n \in \{K, \dots, N\}$  :

$$y_n = - \sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} + \sum_{l=0}^{L-1} b_l u_{n-l}$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_K \\ y_{K+1} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{Y_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{K-1} & y_{K-2} & \cdots & y_0 & u_K & u_{K-1} & \cdots & u_{K-L+1} \\ y_K & y_{K-1} & \cdots & y_1 & u_{K+1} & u_K & \cdots & u_{K-L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-K} & u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-L+1} \end{pmatrix}}_{T_N} \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_K \\ b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix}}_{-A}$$

$$\Rightarrow A = - \underbrace{(T_N^T T_N)^{-1} T_N^T}_{T_N^\dagger} Y_N$$

L'identification linéaire se résume donc à un calcul de "pseudo-inverse".

Dans l'algorithme, on choisit  $C$  (et donc  $\psi_C$ ) et les signaux de l'identification linéaire sont :

$$\begin{cases} u_n = \psi(\hat{y}_{n-1}) \\ y_n = \hat{y}_n \end{cases}$$

## 3.3 Mesure de la qualité de l'identification linéaire

### 3.3.1 Par prédiction

Une possibilité pour calculer une mesure de la qualité de l'identification linéaire est de prendre la fonction suivante (voir De Feo (2001), p.134) :

$$\begin{cases} f_I(C) = \frac{1}{r_e} \sum_{i=1}^{r_e} e'_{k_e}(i)^2 & \text{(erreur quadratique moyenne)} \\ e_{k_e}(i) = y_{i+k_e|i} - \hat{y}_{i+k_e} & \text{(erreur comprenant une erreur statique systématique)} \\ e'_{k_e}(i) = e_{k_e}(i) - E[e_{k_e}(n)] & \text{(erreur centrée)} \end{cases}$$

Où  $r_e$  et  $k_e$  sont des nombres d'échantillons correspondant à des multiples de la pseudo-période  $T_p$ , soit  $r_e T_s = n T_p$  et  $k_e T_s = m T_p$  (où  $T_s$  est la fréquence d'échantillonnage, et  $n$  et  $m$  sont deux entiers choisis arbitrairement).

$y_{i+k_e|i}$  est l'estimation de la valeur du signal de sortie du système de Lur'e calculé par prédiction linéaire en connaissant  $u_n$  jusqu'à l'instant  $i+k_e$  et  $\hat{y}_n$  jusqu'à l'instant  $i$ . On détaille ce problème d'estimation dans le paragraphe suivant.

Enfin, le choix de  $e'_{k_e}(i) = e_{k_e}(i) - \mathbb{E}[e_{k_e}(n)]$  plutôt que  $e_{k_e}(i)$  dans le calcul de l'erreur quadratique moyenne est, d'après Oscar de Feo, motivé par le fait que pour des conditions initiales nulles dans la prédiction, on aura une erreur statique systématique ( $\mathbb{E}[e_{k_e}(n)] \neq 0$ ).

On peut résumer cette mesure de qualité de l'identification linéaire comme suit (cf fig.3.1.) :

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r_e\}$ , on calcule  $y_{i+k_e|i}$  correspondant à une prédiction linéaire par filtrage. A l'instant  $i$ , le filtrage a pour caractéristiques :

**signal d'entrée du filtre :**  $u_n = \psi(\hat{y}_{n-1}, n \in \{i, \dots, i + k_e\}$

**signal de sortie du filtre :**  $y_n^i, n \in \{i, \dots, i + k_e\}$

**Paramètres :** – conditions initiales de la sortie :  $\forall n \in \{i - K, \dots, i - 1\}, y_n^i = \hat{y}_n$   
– coefficients  $A$  du filtre issus de l'identification linéaire

**valeur à prédire :**  $y_{i+k_e|i} = y_{i+k_e}^i$  (seule la dernière valeur du signal filtré nous intéresse)

**équation du filtrage :**  $y_n^i = -\sum_{k=1}^K a_k y_{n-k}^i + \sum_{l=0}^{L-1} b_l u_{n-l}$

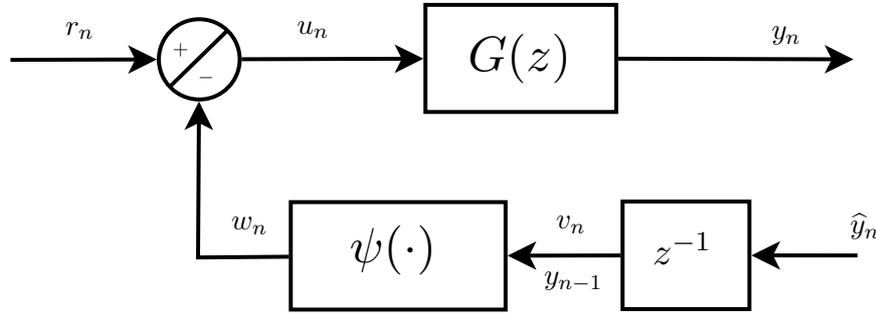


FIGURE 3.1 – Schéma de la prédiction pour la mesure de la qualité de l'identification linéaire

### 3.3.2 En utilisant la matrice de corrélation

Une autre méthode<sup>2</sup> pour obtenir une mesure de la qualité de l'identification linéaire (cf (De Feo, 2001, p.134)) est de calculer l'intervalle (ou tolérance) des paramètres obtenus par identification linéaire.

En appelant  $A$  les paramètres, et  $\bar{A}$  les paramètres moyens, la matrice  $\Theta_A$  de covariance des paramètres est :

$$\Theta_A = E \left[ (A - \bar{A})(A - \bar{A})^\top \right]$$

la tolérance est alors :

$$R_A = \Theta_A \cdot \sqrt{\bar{A}\bar{A}^\top}$$

Enfin, une mesure de "mauvaise qualité" de l'identification linéaire est donnée par la norme infinie de  $R_A$ . D'après Walter & Pronzato (1994),  $\Theta_A$  peut être approchée par la matrice  $(T_N^\top T_N)^{-1}$  calculée dans l'identification linéaire (cf 3.2). Cette méthode a donc l'avantage d'être bien plus rapide que la précédente, puisque le calcul de  $\Theta_A$  est déjà fait.

## 3.4 Contraintes sur les paramètres

Les  $f_{P_j}$  expriment les contraintes sur les paramètres et seront du type :

2. Les deux méthodes de 3.3.1 et 3.3.2 ont été testées et chacune peut être intéressante suivant les cas.

$$f_{P_j}(C) = \frac{1}{g^2(C)} \quad (3.1)$$

$$f_{P_j}(C) = \frac{1}{|a_i|} \quad (3.2)$$

$$f_{P_j}(C) = \frac{1}{|\mu_i|} \quad (3.3)$$

où :

- (3.1) pénalise les régressions de  $\psi$  en fonction linéaire ( $g(C) = 0$  est l'équation d'une combinaison des paramètres équivalente à une régression de la fonction non-linéaire en une fonction linéaire);
- (3.2) pénalise les dégénérescences d'ordre du filtre (les  $a_i$  étant les coefficients du filtre);
- (3.3) pénalise les régressions du filtre en retard pur (les  $\mu_i$  étant les pôles du filtre).

### 3.5 Résumé de l'algorithme de calcul de la fonction d'objectif

---

**Algorithm 1** Calcul de la valeur de la fonction d'objectif pour  $C$  fixé

---

Calculer  $u_n$  tel que :  $u_n = \psi(\hat{y}_{n-1})$

Identifier les coefficients  $\{a_k\}_{k=1\dots K}$  et  $\{b_l\}_{l=1\dots L}$  du filtre (étant donné l'entrée  $u$  et la sortie  $\hat{y}$ )

Calcul de l'estimation de la qualité de l'identification linéaire ( $f_I(C)$ )

Calcul des contraintes ( $f_{P_j}$ )

Calcul de la fonction d'objectif :  $f_{obj}(C) = f_I(C) + \sum_j f_{P_j}(C)$

---

On optimise la fonction d'objectif par rapport aux paramètres de la fonction non-linéaire avec une méthode d'optimisation numérique comme les algorithmes génétiques ou le recuit simulé (c'est cette dernière méthode que nous avons utilisé, voir Annexe C.1).

Ces méthodes fixent à chaque itération un ensemble de paramètres  $C$  et calculent la fonction d'objectif associée. Elles explorent ainsi l'espace des paramètres jusqu'à ce qu'elles estiment avoir trouvé le minimum global de la fonction d'objectif.

En résumé, on a ici une approche de type "boîte noire" : on ne se demande pas quelle est la signification des coefficients du filtre et de la non-linéarité. D'ailleurs, il semble difficile de les rapprocher de caractéristiques physiques relatives au fonctionnement de la glotte, et cela n'est de toute façon pas cohérent avec la démarche de l'algorithme.

### 3.6 Résultats

Nous avons testé cet algorithme avec une technique d'optimisation de type recuit simulé. Nous avons rencontré plusieurs difficultés :

- l'initialisation
- la détermination des ordres du filtre et du nombre de paramètres de la fonction non linéaire;
- La part de la fonction non-linéaire; (déterminé l'ordre de grandeur des valeurs de  $\psi$  sur l'intervalle décrit par les valeurs du signal cible);
- Le contrôle de l'évolution des paramètres

Les signaux de synthèse obtenus après optimisation sont, de façon évidente, assez éloignés des signaux cible (dont quelques exemples sont donnés en tables 3.2 et 3.2). Il y a plusieurs possibilités d'explication à cela :

**Algorithme mal adapté :** l'algorithme repose sur la supposition suivante : si la mesure de qualité de l'identification linéaire est suffisamment bonne (ce qui correspond idéalement au minimum de la fonction d'objectif), alors cela veut dire que le système de Lur'e peut reproduire le signal cible. Or la fonction d'objectif ne dépend pas directement de l'écart entre le signal synthétisé (pour des paramètres  $C$  donnés) et le signal cible, donc rien ne nous assure que celle-ci sera faible. Cependant, [De Feo (2001)] donne quelques exemples d'analyse et de synthèse réussies pour des signaux proche des notres, donc cette raison n'est pas satisfaisante.

**Paramètres de l'optimisation numérique :** Les paramètres du recuit simulé (contrôlant l'initialisation et l'évolution de la température, la détermination de paramètres voisins, etc.) sont difficiles à déterminer, mais on peut cependant raisonnablement penser que la souplesse de recherche de l'algorithme peut compenser un choix imparfait dans les paramètres. On écarte donc aussi cette explication.

**Manque de précision sur les paramètres estimés** On a souligné en 2.3.2 (et en examinant l'évolution de l'algorithme de recuit simulé) que des variations très petites de certains paramètres de la non-linéarité pouvaient entraîner des synthèses très différentes. Il est donc possible que notre méthode de recherche de paramètres, couplée à un paramétrage de la fonction d'objectif impliquant un grand nombre de coefficients (un quinzaine semble un minimum), ne soit pas assez précise pour trouver des paramètres permettant une synthèse satisfaisante.

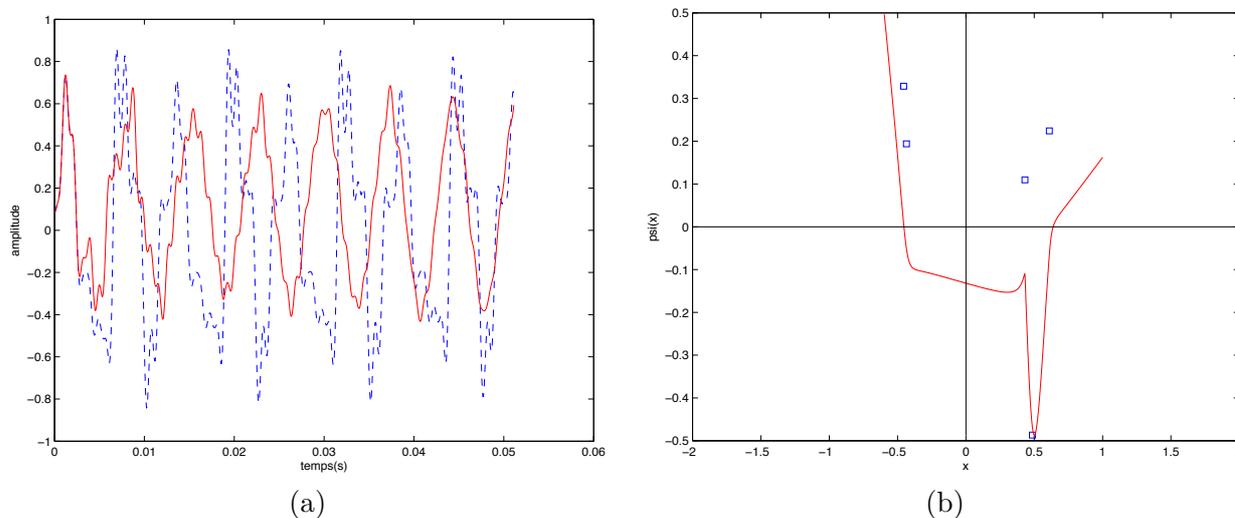
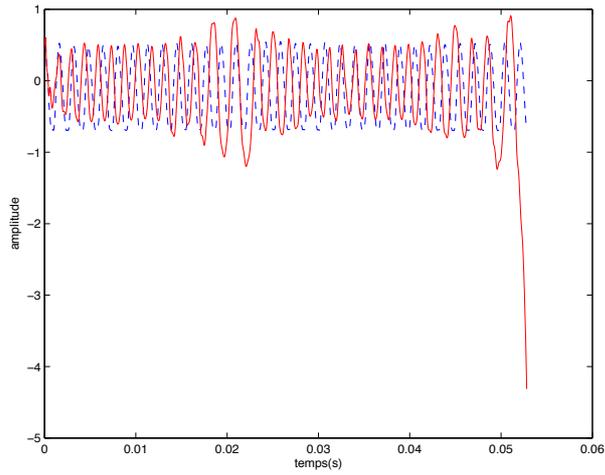
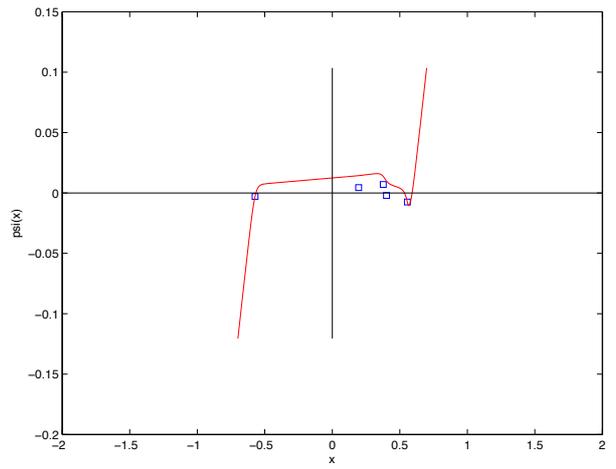


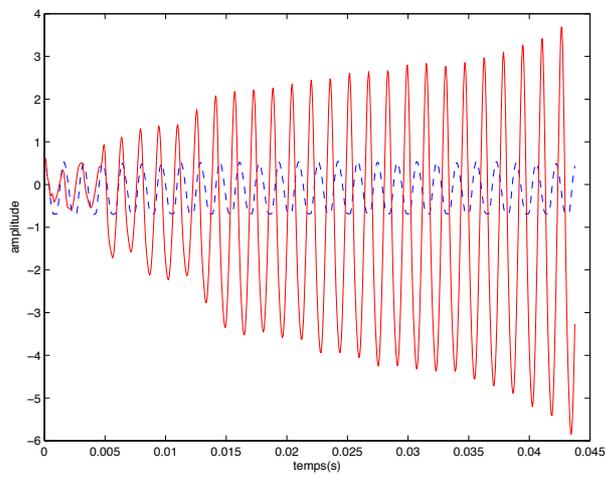
TABLE 3.1 – Exemple de synthèse après identification paramétriques : (a) - signal de synthèse (le signal synthétisé est en rouge, le signal cible est en pointillés bleu) ; (b) - non-linéarité.



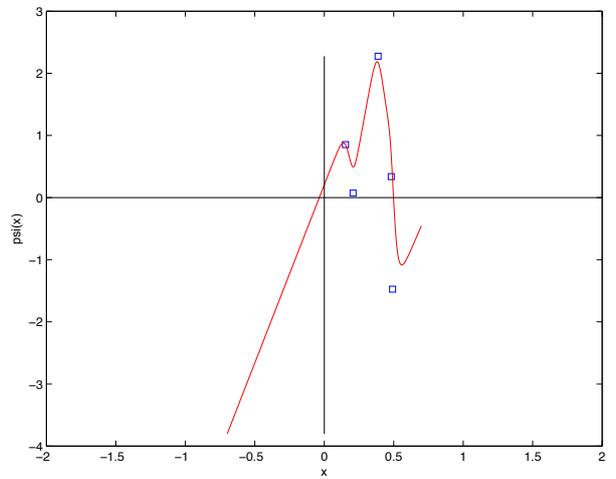
(a)



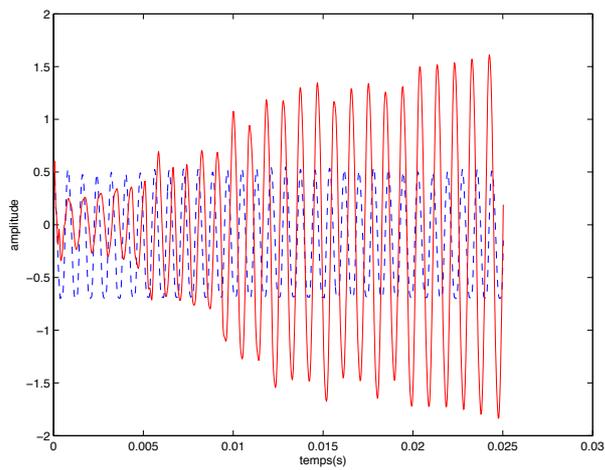
(b)



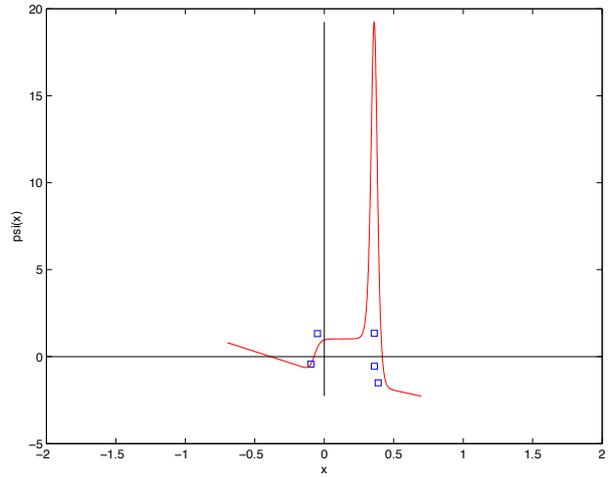
(c)



(d)



(e)



(f)

TABLE 3.2 – Exemples de synthèse après identification paramétriques : (a),(c),(e) - signaux de synthèse (le signal synthétisé est en rouge, le signal cible est en pointillés bleu) ; (b),(d),(f) - non-linéarités correspondant respectivement à (a),(c) et (e).

# Chapitre 4

## Utilisation de modèles physiques

Le but de cette étude est de préciser le modèle très général défini en 2.2. Ce modèle ne comporte en effet aucune information a priori sur la nature de la non-linéarité et du filtre, et doit pouvoir reproduire toutes les dynamiques chaotiques de type Feigenbaum [De Feo (2001)]. L'idée est alors d'informer ce modèle par des considérations physiques spécifiques à la glotte. Cependant, le modèle de Lur'e ayant une structure particulière (une seule non-linéarité ne dépendant que d'une seule variable), nous serons amenés à faire des simplifications pour respecter cette structure.

### 4.1 Modèle à une masse

Nous étudions dans un premier temps un simple système masse-ressort-amortisseur (cf. figures de la table 4.1). Nous souhaitons transformer les équations différentielles correspondantes en un système de Lur'e à temps continu (cf annexe B).

#### 4.1.1 Modèle Théorique

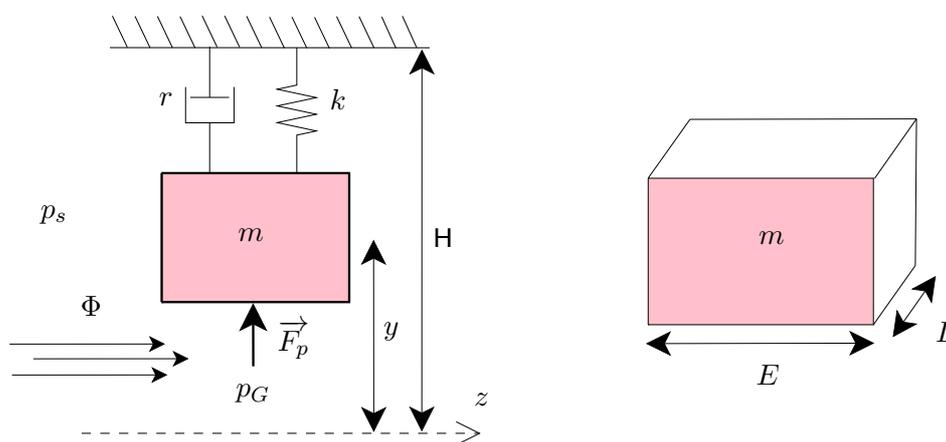


TABLE 4.1 – Modèle physique

## Modèle mécanique

On considère un modèle mécanique à une masse et un modèle de propagation simplifié à impédance constante. La masse est soumise à une force de rappel par le biais d'un ressort de raideur  $k$ , et à une force d'amortissement par le biais d'un amortisseur de coefficient d'amortissement  $r$ . Enfin, il s'exerce une force de pression  $F_p = ELp_G$  où  $p_G$  est la pression glottique.

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + k(y - y_0) = F_p = ELp_G \quad (4.1)$$

## Modèle d'écoulement

On considère l'écoulement glottique comme parfait, incompressible, irrotationnel et permanent (cf [(Cisonni, 2008, p.38)]). D'après la loi de Bernoulli, le flux d'air  $\phi$ , constant sur toute la longueur de la glotte à un instant donné, suit en tout point  $M$  l'équation suivante :

$$p_M = \frac{1}{2}\rho\Phi^2 \frac{1}{A_M^2}$$

où  $A_M = Ly_M$  est l'aire de la glotte au point  $M$  suivant le plan normal à la direction  $z$ . On peut donc relier la pression  $p_G$  s'exerçant sur la surface de la masse (pression glottique) à la pression  $p_s$  à l'entrée de la glotte (pression sub-glottique) :

$$p_s - p_G = \frac{1}{2}\rho\Phi^2 \left[ \frac{1}{(Ly)^2} - \frac{1}{(LH)^2} \right] \quad (4.2)$$

## Modèle de propagation

On considère un modèle de propagation très simplifié où l'impédance acoustique est constante :

$$Z\Phi = p_G \quad (4.3)$$

On justifie cette approximation par la volonté d'obtenir une non-linéarité compatible avec la structure de modèle de Lur'e.

### 4.1.2 Adimensionnement et paramètres réduits

En introduisant les paramètres réduits  $\begin{cases} \lambda & = & \frac{r}{m} \\ \omega_0 & = & \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \mu & = & \frac{mH}{EL} \\ P_B & = & \frac{(ZLH)^2}{\rho} \end{cases}$ , la variable réduite  $x_H = \frac{y}{H}$  (et

de même  $x_0 = \frac{y_0}{H}$ ) et en injectant (4.3) dans (4.2) pour éliminer  $\phi$ , on obtient les équations suivantes :

$$\ddot{x}_H + \lambda\dot{x}_H + \omega_0^2(x_H - x_0) = \frac{p_G}{\mu} \quad (4.4)$$

$$p_s - p_G = \frac{1}{2} \frac{p_G^2}{P_B} \left[ \frac{1}{x_H^2} - 1 \right] \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Equation à une variable et une non-linéarité

L'équation (4.5) donne  $p_G$  par résolution d'une équation du second degré :

$$p_G = -P_B \frac{x_H^2}{1-x_H^2} \left( 1 - \sqrt{1 + 2 \frac{p_s}{P_B} \left( \frac{1-x_H^2}{x_H^2} \right)} \right) \quad (4.6)$$

soit :

$$p_G = -p_s f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x_H)\right)$$

où

$$\begin{cases} f(X) &= X \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{X}} \right) \\ \chi(x) &= \frac{x^2}{1-x^2} \end{cases}$$

On étudie  $F_K = f\left(\frac{\chi(x)}{K}\right) = \frac{1}{K} \left( \frac{x^2}{1-x^2} \right) \left[ 1 - \sqrt{1 + 2K \left( \frac{1-x^2}{x^2} \right)} \right]$  (tracée en fig.4.2) :

- $F_K$  est continue en 0, -1 et 1 ;
- Pour  $K \leq \frac{1}{2}$  :  $\mathcal{D}_{F_K} = \mathbb{R}$  (cf table 4.2, fig.(a)) ;
- Pour  $K > \frac{1}{2}$  :  $\mathcal{D}_{F_K} = [-x_M; x_M]$  avec  $x_M = \sqrt{\frac{K}{K-\frac{1}{2}}} > 1$  (cf table 4.2, fig.(b)) ;

On cherche une équation décrivant le système de Lur'e, c'est-à-dire une équation différentielle linéaire en une variable  $x$  et une variable  $u = \psi(x)$  où  $\psi$  est une fonction non linéaire ne dépendant que de  $x$  (un autre exemple de mise sous la forme de système de Lur'e est donné en annexe D.1). En posant  $x = x_H - x_0$ , une telle équation est ici :

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{p_s}{\mu} f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x + x_0)\right) \quad (4.7)$$

Notre modèle autorise le choix de  $\psi$  à un coefficient multiplicateur près. On choisit :

$$\psi(x) = -p_s f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x + x_0)\right) \quad (4.8)$$

$\psi$  est alors positive et correspond à la pression associée à la force de pression. L'équation du système de Lur'e est alors :

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{\mu} \psi_{ps}(x) \quad (4.9)$$

### 4.1.4 Propriétés remarquables du système

**Si  $p_s = 0$  :**  $\psi_0(x) = 0$

Le modèle devient :  $\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , ce qui correspond à un oscillateur harmonique amorti de pseudo-période  $\omega_0$ . En d'autres termes, on a supprimé la non-linéarité.

**Critère du cercle :** Le critère du cercle [Atherton & Atherton (1975)] impose que  $\psi(0) = 0$ , ce qui n'est pas le cas ici. On ne peut pas montrer la stabilité du système avec ce critère, mais comme il ne fournit que des conditions suffisantes pour la stabilité, celle-ci reste possible en-dehors des conditions d'applications du critère.

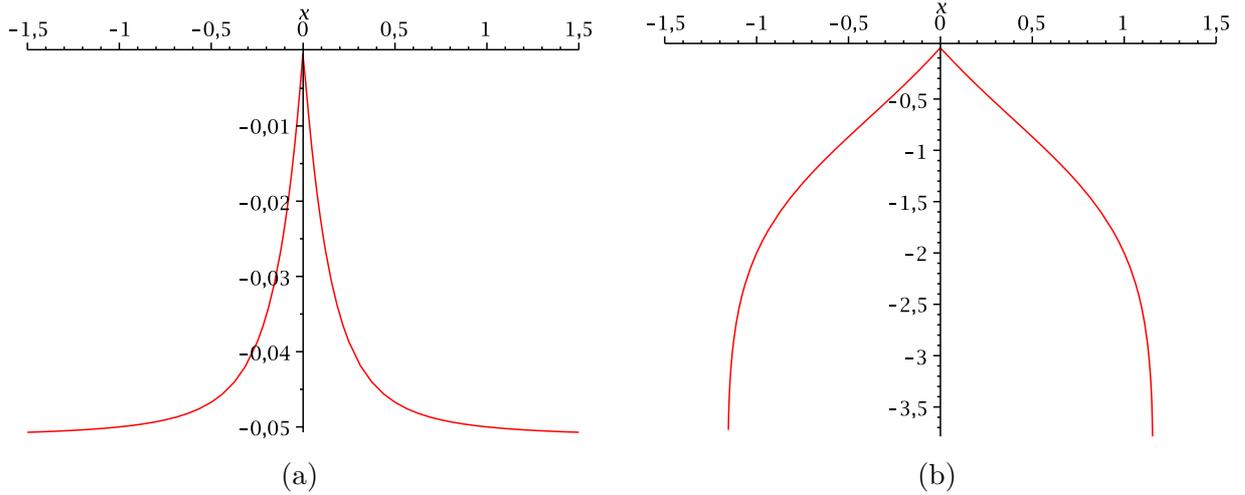


TABLE 4.2 – Tracés de la fonction  $F_K$  - (a)  $K = 0.1$  - (b)  $K = 4$

#### 4.1.5 Système de Lur'e (à temps continu)

L'équation différentielle et la non-linéarité scalaire (à une seule variable) forment un système de Lur'e à temps continu (cf. fig.4.1 et annexe B) :

$$\begin{cases} G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1/\mu}{s^2 + \lambda s + \omega_0^2} \\ u(t) = \psi_{p_s}(x(t)) \\ \psi_{p_s}(x) = -p_s f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x + x_0)\right) \end{cases}$$

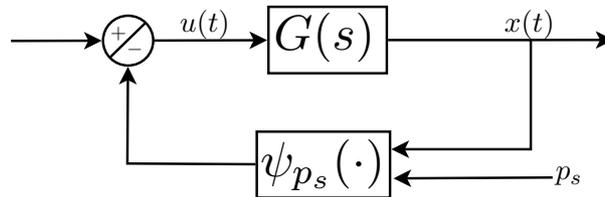


FIGURE 4.1 – Schéma du système de Lur'e à temps continu

Ce qui donne le système de Lur'e suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \tilde{A}X(t) + \tilde{b}u(t) \\ u(t) = \psi_{p_s}(x(t)) \\ x(t) = \tilde{c}^T X(t) \end{cases} \text{ avec } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & -\omega_0^2 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\mu \end{bmatrix}$$

Ce modèle ne peut pas être chaotique, car on ne peut avoir de chaos pour une équation différentielle non linéaire d'ordre 2 à une dimension (le théorème de Poincaré-Bendixson affirme en effet qu'il ne peut y avoir dans ce cas là que des trajectoires convergentes, divergentes ou périodiques, cf (Scheinerman, 1996, p.112)). Il faut donc complexifier le modèle pour obtenir une dimension plus élevée.

## 4.2 Modèle à deux masses

On complexifie le modèle physique en considérant deux systèmes masse-ressort-amortisseur<sup>1</sup> où les deux masses sont couplées par l'intermédiaire d'un troisième ressort (cf fig.4.2).

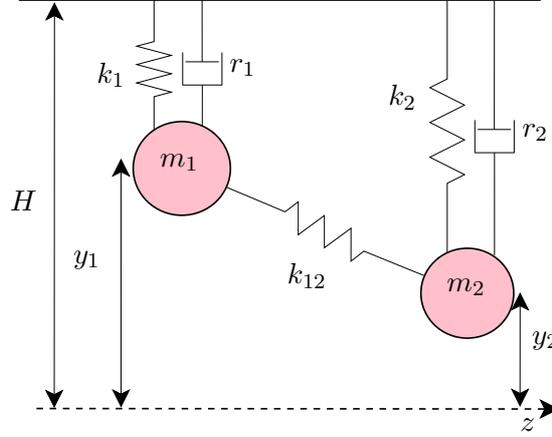


FIGURE 4.2 – Modèle à deux masses

Soient les paramètres réduits :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{r_1}{m_1} ; \\ \lambda_2 = \frac{r_2}{m_2} ; \end{cases} \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} ; \end{cases} \begin{cases} \omega_{12} = \sqrt{\frac{k_{12}}{m_1}} \\ \omega_{21} = \sqrt{\frac{k_{12}}{m_2}} \end{cases}$$

On choisit des longueurs à vide égales pour simplifier les calculs :  $y_{1_0} = y_{2_0} = y_0 = H - l_0$ . On définit alors les variables réduites :

$$x_0 = \frac{y_0}{H} ; \begin{cases} x_{H_1} = \frac{y_1}{H} ; \\ x_{H_2} = \frac{y_2}{H} ; \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_{1_0} - x_0 \\ x_2 = x_{2_0} - x_0 \end{cases}$$

ce qui donne les équations mécaniques suivantes :

$$\ddot{x}_1 + \lambda_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_{12}^2 (x_2 - x_1) = \frac{F_{p1}}{H m_1} \quad (4.10)$$

$$\ddot{x}_2 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \omega_{21}^2 (x_1 - x_2) = \frac{F_{p2}}{H m_2} \quad (4.11)$$

On souhaiterait fortement avoir une seule non-linéarité dépendant d'une seule variable dans l'équation régissant l'évolution du système, et c'est dans  $F_{p1}$  et  $F_{p2}$  que des non-linéarités peuvent apparaître. Nous présentons deux possibilités de modélisation des forces de pression.

### 4.2.1 Forces de pression

Ici la force de pression est considérée constante sur toute la surface  $S = EL$  délimitée par les masses  $m_1$  et  $m_2$  ( $L$  est la largeur des cordes vocales), et elle dépend de  $p_C$ , la pression au point  $C$  (voir schéma 4.3) :  $F_{p1} = F_{p2} = F_{pC}$

On trouve par projection de  $\vec{F}_p$  sur l'axe vertical :

1. L'utilisation de tels modèles à deux masses est assez répandue, voir par exemple [Bailly (2009), Cisonni (2008), Ishizaka & Flanagan (1972)]

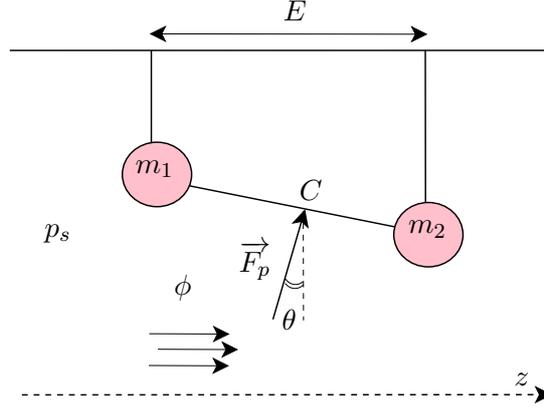


FIGURE 4.3 – Modèle trapézoïdal

$$F_{pC} = EL \cos(\theta) p_C = \frac{EL}{\sqrt{1 + \left(\frac{H(x_{H_2} - x_{H_1})}{E}\right)^2}} p_C \quad (4.12)$$

Où  $p_C$  est la pression au point  $C$ . On peut reprendre les équations (4.2) et (4.3) pour modéliser le rapport entre  $p_C$  et la pression sub-glottique  $p_s$  ainsi que le flux  $\phi$  :

$$Z\phi = p_C \quad (4.13)$$

$$p_s - p_C = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\phi}{L}\right)^2 \left[ \frac{1}{(Hx_C)^2} - \frac{1}{H^2} \right] \quad (4.14)$$

où  $x_C = \frac{x_{H_2} + x_{H_1}}{2} = \frac{x_2 + x_1}{2} + x_0$  ;

On retrouve alors comme en (4.6) :

$$p_C = -P_B \frac{x_C^2}{1 - x_C^2} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2p_s(1 - x_C^2)}{P_B x_C^2}} \right] \quad (4.15)$$

avec  $P_B = \frac{(ZLH)^2}{\rho}$ . Ceci donne l'expression de la force de pression :

$$F_{pC} = \frac{ELp_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{H(x_2 - x_1)}{E}\right)^2}} f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + x_0\right)\right) \quad (4.16)$$

avec

$$\begin{cases} f(X) &= X \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{X}} \right] \\ \chi(x) &= \frac{x^2}{1 - x^2} \end{cases} \quad (4.17)$$

En conclusion, on a une seule non-linéarité  $\psi$  mais qui dépend de deux variables :  $\psi = \psi(x_1, x_2)$ , sans possibilité de changement de variable linéaire  $x' = f(x_1, x_2)$  tel que  $\psi = \psi(x')$ .

### 4.3 Adaptation à la structure des systèmes de Lur'e

On voit que ces équations ne correspondent pas au modèle de Lur'e, qui comporte une seule non-linéarité  $\psi$  ne dépendant que d'une seule variable  $y$  (on appelle alors  $u = \psi(y)$ ). Quelles hypothèses simplificatrices peut-on faire pour avoir un système de Lur'e ?

Dans le cas général nous proposons une série d'approximations pour passer de deux variables à une seule, puis de deux fonctions non linéaires à une seule. Nous examinons ensuite leur application aux cas particulier présentés en 4.2.

#### 4.3.1 Approximations

##### 1. Changement de coordonnées :

Soit  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$  et :

$$\begin{cases} x_m &= (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \\ \epsilon &= x_2 - x_1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_1 &= x_m - \alpha\epsilon \\ x_2 &= x_m + (1 - \alpha)\epsilon \end{cases} \quad (4.18)$$

On souhaite prendre  $y = x_m$  dans le système de Lur'e, et négliger  $\epsilon$ .

##### 2. Changement de fonctions :

Pour deux non-linéarités  $\psi_1(x_1, x_2)$  et  $\psi_2(x_1, x_2)$ , soit  $\beta$  tel que  $0 < \beta < 1$  et :

$$\begin{cases} \Psi(x_m, \epsilon) &= (1 - \beta)\psi_1(x_1, x_2) + \beta\psi_2(x_1, x_2) \\ \delta\Psi(x_m, \epsilon) &= \psi_2(x_1, x_2) - \psi_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.19)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \psi_1(x_m - \alpha\epsilon, x_m + (1 - \alpha)\epsilon) &= \Psi(x_m, \epsilon) - \beta\delta\Psi(x_m, \epsilon) \\ \psi_2(x_m - \alpha\epsilon, x_m + (1 - \alpha)\epsilon) &= \Psi(x_m, \epsilon) + (1 - \beta)\delta\Psi(x_m, \epsilon) \end{cases} \quad (4.20)$$

On souhaite prendre  $\psi = F_m$  (soit  $u = \psi(y) = F_m(x_m)$ ), et négliger  $\delta F_m$ .

##### 3. Développement limité :

On fait alors un développement limité des  $\psi_i$  en supposant que  $\epsilon \ll x_m$ . Pour l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \Psi(x_m, \epsilon) &= \underbrace{\Psi(x_m, 0)}_{\psi(y)} + \underbrace{[-\alpha(1 - \beta)\psi_1'(x_m, x_m) + (1 - \alpha)\beta\psi_2'(x_m, x_m)]}_{d\Psi(x_m) \simeq cste} \epsilon + o(\epsilon) \\ \delta\Psi(x_m, \epsilon) &= \underbrace{\delta\Psi(x_m, 0)}_{\simeq cste} + \underbrace{[\alpha\psi_1'(x_m, x_m) + (1 - \alpha)\psi_2'(x_m, x_m)]}_{d(\delta\Psi)(x_m) \simeq cste} \epsilon + o(\epsilon) \end{cases} \quad (4.21)$$

##### 4. choix de $\alpha$ et $\beta$ :

On souhaite éliminer le plus possible de termes dépendant de  $x_m$  dans le développement limité. A l'ordre 1, cela revient rechercher  $\alpha$  et  $\beta$  tels que les termes  $d\Psi$  et  $d(\delta\Psi)$  soient des constantes (éventuellement nulles mais ce n'est pas obligatoire, car dans le cas contraire on pourrait faire passer ces termes linéaires en  $\epsilon$  dans la partie linéaire de l'équation différentielle). On peut considérer que cette contrainte de constance doit être appliquée en priorité à  $d(\delta\Psi)$ .

### 5. Développement limité en $x_m$ autour de l'équilibre :

Dans le cas où il serait impossible de rendre constantes les fonctions mentionnées par simple choix de  $\alpha$  et  $\beta$ , ou si  $\delta\Psi(x_m, 0)$  n'est pas nulle, on peut considérer que  $x_m$  est proche de la position d'équilibre  $x_{\acute{e}q}$  du point de vue de ces fonctions, soit :

$$f(x_m) \simeq f(x_{\acute{e}q}) = K_{\acute{e}q} = cste \quad (4.22)$$

pour  $f(x_m) = \delta\Psi(x_m, 0)$ ,  $d\Psi(x_m)$  ou  $d(\delta\Psi)(x_m)$  et donc

$$\psi_i = \underbrace{\Psi(x_m, 0)}_{\psi(y)} + K_{\acute{e}q_i} \epsilon \quad (4.23)$$

On a de cette façon une non-linéarité ne dépendant que d'une seule variable, l'autre partie étant linéaire en  $\epsilon$

#### 4.3.2 Cas où $\psi_1 = \psi_2$

On a alors :

$$\begin{cases} \Psi(x_m, \epsilon) &= \underbrace{\Psi(x_m, 0)}_{\psi_1(x_m)=\psi_2(x_m)} + (\beta - \alpha) \psi'_1(x_m) \epsilon + o(\epsilon) \\ \delta\Psi(x_m, \epsilon) &= 0 + \psi'_1(x_m) \epsilon + o(\epsilon) \end{cases} \quad (4.24)$$

On voit que  $\delta\Psi(x_m, 0) = 0, \forall x_m$ , et que pour  $\alpha = \beta$ ,  $\Psi(x_m, \epsilon) = \Psi(x_m, 0) + o(\epsilon), \forall x_m$ .

#### 4.3.3 Application au modèle à deux masses

Dans le cas du modèle de 4.2,

$$F_{pC} = F_{p1} = F_{p2} = \frac{ELp_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{H(x_2 - x_1)}{E}\right)^2}} f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + x_0\right)\right) \quad (4.25)$$

Ceci suggère d'emblée  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , soit  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . De plus, les non-linéarités sont égales : nous sommes donc dans le cas où " $\psi_1 = \psi_2$ ". Toujours dans l'objectif d'obtenir  $\psi$  homogène à pression, on choisit  $\psi_1 = \psi_2 = \frac{F_{pC}}{EL}$ , ce qui donne :

$$\Psi(x_m, \epsilon) = \frac{p_s}{\sqrt{1 + \left(\frac{H\epsilon}{E}\right)^2}} f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x_m + x_0)\right)$$

On peut faire un développement limité de  $\Psi$  par rapport à  $\epsilon$  :

$$\Psi(x_m, \epsilon) = p_s f\left(\frac{P_B}{p_s} \chi(x_m + x_0)\right) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H\epsilon}{E}\right)^2\right]$$

D'où en négligeant  $\epsilon^2$ , on peut choisir la non-linéarité finale  $\psi$  :

$$\psi(x_m) = -P_B \frac{x_m^2}{1 - x_m^2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2p_s}{P_B} \frac{(1 - x_m^2)}{x_m^2}}\right]$$

#### 4.3.4 Obtention d'une équation différentielle unique

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\ddot{x}_1 + \lambda_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + w_{12}^2 (x_2 - x_1) = \frac{p_s}{\mu_1} \psi_{p_s}(x_m) \quad (4.26)$$

$$\ddot{x}_2 + \lambda_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + w_{21}^2 (x_1 - x_2) = \frac{p_s}{\mu_2} \psi_{p_s}(x_m) \quad (4.27)$$

où  $\begin{cases} \mu_1 &= \frac{m_1 H}{E_1 L} \\ \mu_2 &= \frac{m_2 H}{E_2 L} \end{cases}$  et  $\begin{cases} K_1 &= \frac{p_s}{\mu_1} \\ K_2 &= \frac{p_s}{\mu_2} \end{cases}$ . On reprend les notations de 4.3.1, et on pose :

$$\begin{cases} y &= x_m \\ u &= \psi_{p_s}(x_m) \end{cases}$$

On calcule ensuite "(4.27) - (4.26)" et " $\alpha \cdot (4.26) + \frac{1}{1-\alpha} \cdot (4.27)$ ". On obtient alors :

$$[\lambda_\epsilon \dot{y} + \omega_\epsilon^2 y] + [\dot{\epsilon} + \lambda_m \dot{\epsilon} + \omega_m^2 \epsilon] = K_\epsilon u \quad (4.28)$$

$$[\ddot{y} + \lambda_M \dot{y} + \omega_M^2 y] + [\ddot{\epsilon} + \lambda_\epsilon \dot{\epsilon} + \omega_\epsilon^2 \epsilon] = K_M u \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_M &= \frac{\lambda_1}{\alpha} &+ & \frac{\lambda_2}{1-\alpha} \\ \omega_M^2 &= \frac{1}{\alpha} \left( \omega_1^2 - \frac{\omega_{12}^2}{\alpha} \right) &+ & \frac{1}{1-\alpha} \left( \omega_2^2 + \frac{\omega_{21}^2}{1-\alpha} \right) \\ K_M &= \frac{K_1}{\alpha} &+ & \frac{K_2}{1-\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_m &= \alpha \lambda_1 &+ & (1-\alpha) \lambda_2 \\ \omega_m^2 &= \alpha \omega_1^2 + (1-\alpha) \omega_2^2 &+ & \omega_{21}^2 - \omega_{12}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_\epsilon &= \lambda_2 - \lambda_1 \\ \omega_\epsilon^2 &= \omega_2^2 - \omega_1^2 \\ K_\epsilon &= K_2 - K_1 \end{cases}$$

On peut alors éliminer la variable  $\epsilon$  en prenant une combinaison linéaire des équations (4.28) et (4.29) et de leurs dérivées (on montre qu'il est nécessaire d'utiliser les dérivées aux ordres 1 et 2 de ces équations). On obtient alors une équation de la forme :

$$\sum_{k=0}^4 \alpha_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^2 \beta_l u^{(l)}(t)$$

#### 4.3.5 Système de Lur'e (à temps continu)

On peut alors écrire explicitement le système de Lur'e (cf. fig.4.4) :

$$\begin{cases} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{l=0}^2 \beta_l s^l}{\sum_{k=0}^4 \alpha_k s^k} \\ u(t) &= \psi_{p_s}(y(t)) \end{cases}$$

Ce qui donne le système de Lur'e suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= \tilde{A}X(t) + \tilde{b}u(t) \\ u(t) &= \psi_{p_s}(y(t)) \\ y(t) &= \tilde{c}^T X(t) \end{cases}$$

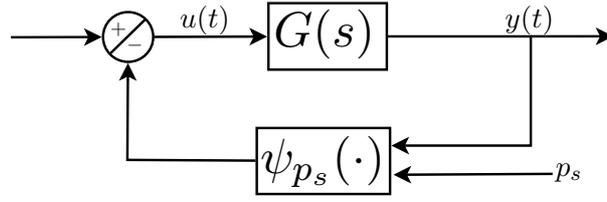


FIGURE 4.4 – Schéma du système de Lur'e à temps continu

$$\text{avec } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_4} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_4} & -\frac{\alpha_0}{\alpha_4} \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\beta_4}{\alpha_4} \end{bmatrix}, \tilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_0}{\alpha_4} \\ \frac{\beta_1}{\alpha_4} \\ \frac{\beta_2}{\alpha_4} \\ \frac{\beta_3}{\alpha_4} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y^{(3)} \end{bmatrix}$$

### 4.3.6 Discrétisation

On discrétise en utilisant l'approximation des trapèzes sur la transformée de Laplace (voir [Piccardi & Rinaldi (2006)] et l'annexe B.2) : on effectue le changement de variable  $s \mapsto \frac{2(z-1)}{T_S(z+1)}$  dans  $G(s)$  pour obtenir  $G(z)$  la transformée en  $z$  :

$$G(z) = \frac{\sum_{l=0}^4 b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^4 a_k z^{-k}}$$

Les coefficients  $a_k$  et  $b_l$  se calculent avec un logiciel de calcul formel comme Maple©. Ceci correspond à l'équation de récurrence en  $y$  et  $u$  :

$$y_n = - \sum_{k=0}^3 a_k y_{n-k} + \sum_{l=0}^4 b_l u_{n-l}$$

On a alors un système de Lur'e complet.

## 4.4 Utilisation pour la synthèse

### 4.4.1

L'utilisation d'un modèle physique fournit plusieurs simplifications par rapport au modèle utilisé dans l'algorithme d'identification du chapitre 3, sous la forme :

- d'une structure forte pour la non-linéarité  $\psi$ , qui dépend ici uniquement de trois paramètres ;
- d'un ordre pour les coefficients du filtre ( $K = L = 4$ ) ;
- d'une bonne initialisation pour les paramètres : en effet, différents travaux sur la modélisation de glotte par un modèle à deux masses proposent des valeurs pour les grandeurs physiques utilisées dans le modèle développé ici ( $m_1, m_2, r_1, r_2, k_1, k_2, k_{12}, p_s, H, x_0$ ).

Rien ne permet d'affirmer que les signaux produits par cette bonne initialisation seront semblables aux signaux cibles, mais on peut raisonnablement espérer qu'ils soient pseudo-périodiques.

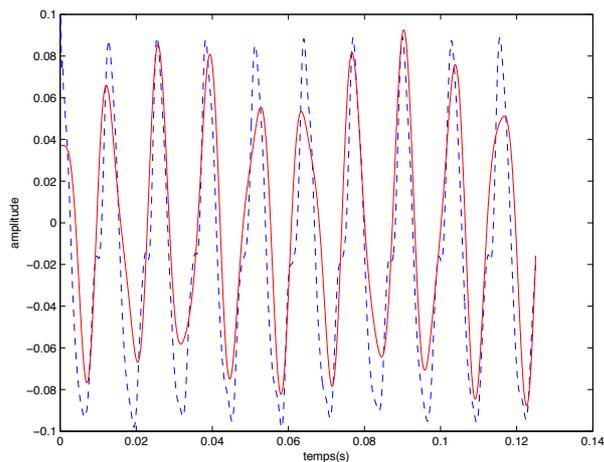
On peut alors envisager plusieurs stratégies d'optimisation par rapport aux paramètres du modèle physique, en reprenant l'idée d'une minimisation de fonction d'objectif. On peut choisir de réaliser l'optimisation sur tous les paramètres, ou en laisser certains fixes. La fonction

d'objectif peut être simplement l'erreur quadratique entre signal synthétisé et signal cible, ou les mesures de qualité d'identification linéaire<sup>2</sup>. développées en 3.3.

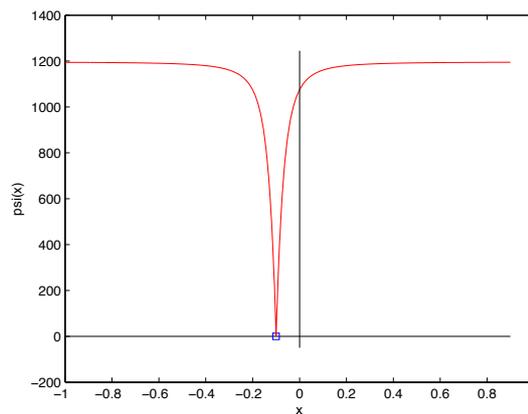
#### 4.4.2 Analyse des résultats

Une nouvelle fois, les résultats (des exemples sont donnés en table 4.3) ne sont pas satisfaisants : le signal synthétisé est pseudo-périodique, a une fréquence correcte et possède une variabilité intéressante, mais sa forme d'onde ressemble peu à celle du signal cible.

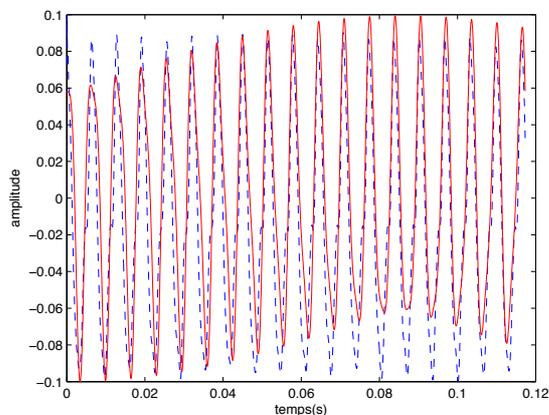
Le fitre ayant un ordre assez élevé, l'explication la plus plausible au manque de précision de la synthèse est que la non-linéarité n'est finalement pas adaptée pour approcher assez finement le signal cible.



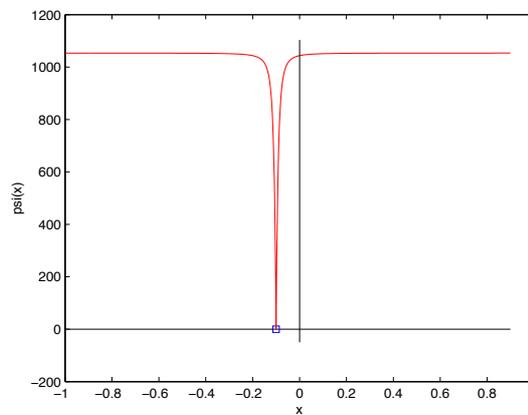
(a)



(b)



(c)



(d)

TABLE 4.3 – Exemples de synthèse après identification paramétriques : (a),(c) - signaux de synthèse (le signal synthétisé est en rouge, le signal cible est en bleu) ; (b),(d) - non-linéarités.

2. Les contraintes ne sont par contre plus nécessaires puisque la régression de  $\psi$  en une fonction linéaire n'est pas possible.

## Chapitre 5

# Conclusion et perspectives

Dans ce stage, nous avons étudié les possibilités de synthèse de signaux de source glottique à l'aide de signaux à dynamique chaotique. Le modèle de synthèse utilisé (modèle de Lur'e) nous a semblé très intéressant par la diversité et la variabilité des signaux qu'il peut engendrer. Néanmoins, les méthodes d'analyse que nous avons tenté de développer semblent insuffisantes : elles permettent de capturer quelques caractéristiques principales du signal (pseudo-période et amplitude), mais sont en revanche trop imprécises pour restituer les variations plus fines de la forme d'onde du signal cible.

La première méthode d'estimation paramétrique, fondée sur un modèle très général pour la synthèse de signaux à dynamique non linéaire semble trop large (notamment en terme de nombre de paramètres de la non-linéarité) par rapport à la finesse requise dans le choix des paramètres pour que la synthèse approche un signal cible de façon satisfaisante.

La solution que nous avons exploré consiste à informer ce modèle général par des considérations physiques. Le respect de la structure du modèle de Lur'e impose alors de faire des approximations assez fortes sur la partie non linéaire du modèle physique. A l'issue de cette modélisation physique, la précision majeure par rapport au modèle du premier algorithme d'analyse concerne la non-linéarité (qui a une forme bien définie et dépend de peu de paramètres), et une initialisation (permise par des valeurs de paramètres physiques cohérentes). Cependant, il semble que le modèle soit alors trop restrictif pour produire des formes d'ondes complexes.

Il nous semble cependant qu'il reste un certain nombre de pistes à explorer pour l'identification paramétrique. Il est possible que d'autres algorithmes d'optimisation puissent être plus performants (vis-à-vis de la fonction d'objectif du chapitre 3), en particulier les algorithmes génétiques.

D'autre part, il nous semble possible d'informer la synthèse à l'aide de modèles issus de la physique mais moins restrictifs que notre modèle à deux masses. On peut penser à l'oscillateur de Colpitts (cf annexe D.1), qui n'est pas directement relié à la physique de la glotte, mais qui est compatible avec le modèle de Lur'e (sans nécessiter d'approximations).

Dans le cas où la synthèse pourrait être améliorée, il faudrait finalement l'intégrer dans le modèle source-filtre complet pour vérifier sa pertinence perceptive.

# Annexes

## Annexe A

# Modèles Source-Filtre

### A.1 Vue d'ensemble du modèle

Le principe des modèles sources-filtres est que l'on considère que le filtre est indépendant de la source, et qu'on peut alors écrire :

$$S(\omega) = G(\omega).C(\omega).L(\omega)$$

avec :

- $S(\omega)$  : signal final (prenant en compte le rayonnement)
- $G(\omega)$  : spectre de la source (signal de débit glottique)
- $C(\omega)$  : réponse du filtre correspondant au conduit vocal
- $L(\omega)$  : rayonnement par la bouche et les narines

## Annexe B

# Modèle de Lur'e à temps continu

### B.1 Formulation

Le modèle de Lur'e à temps continu est très similaire à celui à temps discret (cf fig.B.1), l'équation réursive du filtre étant équivalente ici à une équation différentielle linéaire de transformée de Laplace  $G(s)$  (l'équivalent "temps continu" de  $G(z)$ ). On peut donc écrire :

- Equation différentielle (transformée de Laplace  $G(s)$ ) :

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \beta_l u^{(l)}(t)$$

- Fonction non linéaire  $\psi$  :

$$u(t) = \psi(y(t))$$

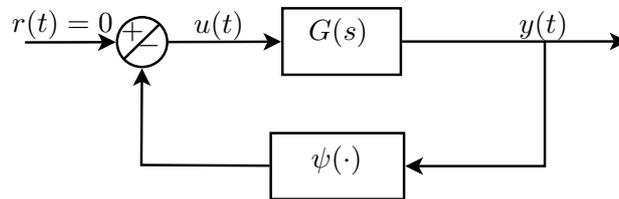


FIGURE B.1 – Structure du modèle de lur'e à temps continu

### B.2 Méthode de discrétisation à l'aide de l'approximation des trapèzes

Une méthode générale de discrétisation des systèmes de Lur'e est présentée dans [Piccardi & Rinaldi (2006)]. On la présente rapidement ici pour montrer ses limites dans notre cas.

Pour le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^\top x(t) \\ u(t) &= \psi(y(t)) \end{aligned} \tag{B.1}$$

On calcule la transformée de Laplace de (B.1) :

$$\begin{aligned} X(s)(sI - A) &= bU(s) \\ Y(s) &= \underbrace{c^\top (sI - A)^{-1} b}_{R(s)} U(s) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

On cherche ensuite à exprimer la fonction de transfert  $Q(z)$  du système :  $Q(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ . On fait pour cela l'approximation des trapèzes. Pour une période d'échantillonnage  $T_S$  :

$$\begin{aligned} x(t + T_S) - x(t) &= \int_t^{t+T_S} Ax(t) + bu(t) dt \\ &\simeq \frac{T_S}{2} [(Ax(t + T_S) + bu(t + T_S)) + (Ax(t) + bu(t))] \end{aligned}$$

En notation discrète pour  $x_n = x(nT_S)$  (de même pour  $u$  et  $y$ ) :

$$x_{n+1} - x_n \simeq \frac{T_S}{2} [(Ax_{n+1} + bu_{n+1} + (Ax_n + bu_n))] \quad (\text{B.3})$$

D'où par transformée en  $z$  :

$$\begin{aligned} X(z) \left[ (z - 1)I - \frac{T_S}{2}(z + 1)A \right] &= \frac{T_S}{2} bU(z) \\ \Rightarrow Y(z) &= \underbrace{c^\top \left( \frac{2(z - 1)}{T_S(z + 1)} I - A \right)^{-1} b}_{Q(z)} U(z) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On a donc une équivalence entre transformée en  $z$  et transformée de Laplace par la transformation :

$$s \mapsto \frac{2(z - 1)}{T_S(z + 1)} \quad (\text{B.5})$$

A partir de (B.4), on déduit une équation de récurrence du type :

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \dots + \alpha_{K-1} y_{n-K} = \beta_0 u_n + \beta_1 u_{n-1} + \dots + \beta_{K-1} u_{n-K} \quad (\text{B.6})$$

Où  $u_n = \psi(y_n)$  (à la différence du modèle à temps discret exposé en 2). Le problème apparaît alors clairement : On souhaite pouvoir calculer  $y_n$  en fonction valeurs passées de  $y_{n-k}$  et  $u_{n-k}$  pour  $k > 0$ . Or  $u_n = \psi(y_n)$  dans le cas présent, et exprimer  $y_n$  en fonction du passé revient donc à résoudre une équation non linéaire du type  $y_n + a\psi(y_n) = b$ , ce qui n'est pas possible dans le cas général.

Si par contre l'on procède à une identification sur les paramètres, rien ne nous empêche d'introduire un retard  $u_n = \psi(y_{n-1})$  (au lieu de  $u_n = \psi(y_n)$ ) dans l'équation (B.6). Dans ce cas les  $\{a_k\}$  et  $\{b_l\}$  calculés par discrétisation ne sont pas exacts pour le système avec retard, mais il peuvent constituer une initialisation sensée pour une identification paramétrique. Cela nous permet de plus d'avoir une idée des ordres du filtre du système de Lur'e à temps discret.

## Annexe C

# Complément sur l'algorithme d'identification paramétrique

### C.1 Recuit Simulé

#### C.1.1 Présentation

La méthode d'optimisation choisie est le recuit simulé. Le but est de minimiser une fonction d'objectif (appelée énergie dans l'algorithme) par rapport à un ensemble de paramètres (ici les paramètres de la fonction non-linéaire). A chaque pas de l'algorithme, à partir d'un état (ensemble de valeurs de paramètres) donné, on calcule de manière aléatoire un état voisin du premier. Si l'énergie associée à ce nouvel état est inférieure à celle de l'état précédent, alors on prend le nouvel état comme l'état courant. Si l'énergie est supérieure (remontée d'énergie), on peut quand même adopter le nouvel état suivant une certaine probabilité dépendant de la différence d'énergie et d'un paramètre appelé la température. Pour des températures élevées, on pourra accepter des remontées d'énergie importantes, et pour des températures faibles on n'acceptera que les faibles remontées d'énergie. Le principe est alors de faire baisser la température tout au long du déroulement de l'algorithme. Les détails de l'algorithme sont décrits dans le pseudo-code de l'algorithme 2 (cf [Charon *et al.* (1996)]).

#### C.1.2 Détails de l'algorithme

On décrit ici quelques choix pratiques pour l'algorithme :

**Choix de la valeur initiale des paramètres** Plusieurs solutions sont envisageables, sans qu'aucune soit véritablement satisfaisante : prendre une fonction proche de l'identité ou de la fonction identiquement nulle, prendre des paramètres au hasards. Un problème pratique est ici que pour de "mauvaises" valeurs des paramètres,  $f_i(C)$  diverge. On peut donc dans ce cas effectuer une première recherche de paramètres voisins où la fonction d'objectif a une valeur "raisonnable".

**Initialisation de la température** On peut initialiser la température de façon à avoir un certain nombre de transformations coûteuses (remontées d'énergie) acceptées par rapport aux nombres de transformation coûteuses totales. La proportion est donnée par :

$$\pi = \exp\left(-\frac{\overline{\Delta f_{obj}}}{T}\right)$$

où  $\overline{\Delta f_{obj}}$  est la valeur moyenne de la différence d'énergie pour un certain nombre de transformations. On peut alors choisir  $\pi$  (par exemple  $\pi = 0.7$ ) et prendre  $T_0 = -\frac{\overline{\Delta f_{obj}}}{\ln(\pi)}$ .

---

**Algorithm 2** Recuit Simulé

---

Choisir une solution initiale  $\Theta_0$   
 $\Theta \leftarrow \Theta_0$   
 $\Theta_{best} \leftarrow \Theta_0$   
 $e_{best} \leftarrow f_{obj}(\Theta_{best})$ ;  
Initialiser la température  $T_0$ ;  $T \leftarrow T_0$   
**while** "Condition 1" **do**  $\triangleright$  Une série de transformations locales à température fixée par itération  
    **while** "Condition 2" **do**  $\triangleright$  Une transformation locale par itération  
         $\Theta' \leftarrow \text{voisin}(\Theta)$   
         $\Delta f_{obj} \leftarrow f_{obj}(\Theta) - f_{obj}(\Theta')$   
        **if**  $\Delta f_{obj} < 0$  **then**  $\triangleright$  Diminution d'énergie : transformation systématiquement acceptée  
             $\Theta \leftarrow \Theta'$   
            **if**  $f_{obj}(\Theta') < e_{best}$  **then**  
                 $e_{best} \leftarrow f_{obj}(\Theta')$   $\triangleright$  Mémoriser la meilleure configuration  
                 $\Theta_{best} \leftarrow \Theta'$   
            **end if**  
        **else**  $\triangleright \Delta f_{obj} \geq 0$  : Remontée d'énergie : acceptée avec une certaine probabilité  
            Tirer  $p \sim U([0; 1])$   
            **if**  $p \leq \exp(-\frac{\Delta f_{obj}}{T})$  **then**  
                 $\Theta \leftarrow \Theta'$   
            **end if**  
        **end if**  
    **end while**  
     $T \leftarrow \mu.T$   $\triangleright$  Actualiser la température  
**end while**

---

Il peut y avoir un problème d'initialisation de la température si les variations d'énergie sont trop importantes dans cette phase : dans ce cas  $T$  est trop élevée et les remontées brutales seront autorisées. On peut donc ne considérer que les remontées "raisonnables" pour que la température joue un rôle limitant dès le début du recuit.

**Condition 1** Détermine le nombre de changements de températures, ou la gestion des "paliers" de température. On peut par exemple s'arrêter quand le gain sur l'énergie est trop faible, ou quand la configuration n'évolue plus.

**Condition 2** Détermine le nombre de calculs de transformations à température fixée. On peut le faire dépendre par exemple du nombre de transformations coûteuses (remontées d'énergie) acceptées par rapport aux nombres de transformation coûteuses totales.

**Calcul des voisins (transformation)** La technique est de type :

$$\forall i \in \{1, \dots, J\}, C'_i = C_i + \delta_i \text{ avec } \delta_i \sim N(0, \sigma_i)$$

La difficulté est de trouver des valeurs de  $\sigma_i$  satisfaisantes. On peut alors aussi utiliser des "mapping" faisant correspondre les  $C_i$  à des paramètres pour lesquels la valeur  $\sigma_i$  est plus simple à ajuster.

**Nouvelle température** Classiquement,  $T' = \mu.T$  avec  $0.85 \leq \mu \leq 0.95$ .

## C.2 Bases de fonctions pour la non-linéarité $\psi$

Plusieurs classes de fonctions ont été testées :

### C.2.1 Polynômes de Tchebychev

On définit les polynômes de Tchebychev (de type 1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) & = & 1 \\ T_1(x) & = & x \\ T_{n+1}(x) & = & 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

### C.2.2 Smoothed Piecewise linear Functions

les "Smoothed Piecewise linear Functions" ont une définition similaire à celle des fonctions continues affines par morceaux.

**Fonctions continues affines par morceaux :** on peut utiliser une définition faisant intervenir la valeur absolue ; on considère alors  $N$  segments, donc  $N - 1$  points de rupture  $x_k$ ,  $N$  paramètres de pente  $\sigma_k$  (qui ne sont cependant pas les valeurs des pentes des segments), et un paramètre de décalage vertical  $y_0$ , ce qui donne l'équation :

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_k |x - x_k| + \sigma_N |p(x - x_N)| + y_0 ; \text{ avec } p(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont faciles à implémenter ( $\psi$  est de plus une combinaison linéaire des  $\psi_j$ ), mais il est difficile de savoir comment faire varier les coefficients  $\{c_j\}_{j=1\dots J}$  pour que  $\psi$  évolue de façon satisfaisante, ce qui est gênant dans l'algorithme d'optimisation numérique.

**Smoothed Piecewise linear Functions :** on remplace l'opérateur "valeur absolue" par la fonction  $s_{\tilde{a}}(x) = \frac{2x}{\pi} \arctan(\tilde{a}x)$  où  $\tilde{a}$  est appelé paramètre d'attraction. On ajoute donc  $N - 1$  paramètres d'attraction, et l'équation devient :

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_k s_{\tilde{a}_k}(x - x_k) + \sigma_N s_{\tilde{a}_{N-1}}(p(x - x_N)) + y_0$$

Remarquons qu'on n'a alors plus véritablement une base de fonctions donc les paramètres  $C$  seraient les coefficients, comme dans le cas des polynômes. Par contre, on dispose d'un homomorphisme entre les ordonnées des points de rupture et les coefficients  $\sigma_k$ , ce qui permet d'utiliser les points de rupture, les attractions ainsi que  $\sigma_1$  et  $\sigma_N$  comme paramètres. Dans ce cas, le rapport entre paramètres et la forme de la fonction est intuitif. C'est donc cette paramétrisation que nous avons majoritairement utilisé.

## Annexe D

# Compléments sur les modèles physiques

### D.1 Exemple de mise sous la forme d'un système de Lur'e

On reprend [(De Feo, 2001, p. 227)]. L'exemple est l'oscillateur de Colpitts (on ne redonnera pas le détail des constantes physiques).

1. On considère un ensemble d'équations différentielles linéaires à l'exception d'une non-linéarité  $\psi(x)$  en une seule variable  $x$  (ou alors plusieurs fois la même non-linéarité en cette variable) ; ici :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)}[-\alpha\psi(y) + x_3] \\ \dot{y} &= \frac{g}{Qk}[(1-\alpha)\psi(y) + x_3] \\ \dot{x}_2 &= \frac{Qk(1-k)}{g}[x_1 + x_2] - \frac{1}{Q}x_3 \end{cases} \quad \text{avec } \psi(x_2) = e^{-x_2} - 1$$

2. on nomme  $u = \psi(x_2)$  et on considère désormais la non-linéarité  $u$  comme une variable (fonction du temps) ; Comme  $\psi$  dépend uniquement de  $x_2$ ,  $x_2$  sera la sortie du système de Lur'e, on renomme donc  $y = x_2$  pour suivre les notations de B.1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{g}{Q(1-k)}[-\alpha u + x_3] \\ \dot{y} &= \frac{g}{Qk}[(1-\alpha)u + x_3] \\ \dot{y} &= \frac{Qk(1-k)}{g}[x_1 + y] - \frac{1}{Q}x_3 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

3. on forme une seule équation différentielle linéaire en  $y$  (la variable de la non-linéarité) et  $u$  à partir de (D.1), en dérivant  $u$  si nécessaire :

$$y^{(3)} + \frac{1}{Q}\ddot{y} + \dot{y} = \frac{g(1-\alpha)}{kQ}(\ddot{u} + \frac{1}{Q}\dot{u} + \frac{k}{1-\alpha}u) \quad (\text{D.2})$$

4. On a alors un système de Lur'e "Continu" résumé par sa transformée de Laplace et l'expression de la non-linéarité (cf. D.1).

$$\begin{cases} G(s) &= \frac{g(1-\alpha)}{kQ} \frac{(s^2 + \frac{s}{Q} + \frac{k}{1-\alpha})}{s(s^2 + \frac{s}{Q} + 1)} \\ \psi(y) &= e^{-y} - 1 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

On voit que ce processus est assez restrictif, notamment sur le type d'équations de départ utilisables.

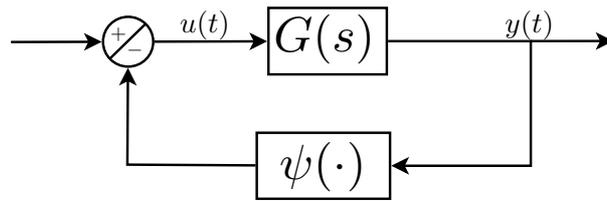


FIGURE D.1 – Schéma du système de Lur'e à temps continu

# Bibliographie

- ATHERTON, D.P., & ATHERTON, D.P. 1975. *Nonlinear control engineering*. Van Nostrand Reinhold London.
- BAILLY, L. 2009. Interaction entre cordes vocales et bandes ventriculaires en phonation : exploration in-vivo, modélisation physique, validation in-vitro.
- CHARON, I., GERMA, A., & HUDRY, O. 1996. *Méthodes d'optimisation combinatoire, Éditions Masson*.
- CISONNI, J. 2008. Modélisation et inversion d'un système complexe de production de signaux acoustiques. Application à la voix et aux pathologies.
- DE FEO, O. 2001. *Modeling diversity by strange attractors with application to temporal pattern recognition*. Ph.D. thesis, Ph. D. thesis Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Lausanne, Switzerland.
- DEGOTTEX, G. 2010. *Glottal source and vocal-tract separation*. Ph.D. thesis, PhD thesis, UPMC-Ircam.
- DOVAL, B., D'ALESSANDRO, C., & HENRICH, N. 2006. The spectrum of glottal flow models. *Acta acustica united with acustica*, **92**(6), 1026–1046.
- FANT, G. 1997. Frequency domain analysis of glottal flow : The LF-model revisited. *Speech production and language : in honor of Osamu Fujimura*, **13**, 77.
- FANT, G., LILJENCRAFTS, J., & LIN, Q. 1985. A four-parameter model of glottal flow. *STL-QPSR*, **4**(1985), 1–13.
- HEZARD, T., HÉLIE, T., CAUSSÉ, R., & DOVAL, B. 2012. Analysis-synthesis of vocal sounds based on a voice production model driven by the glottal area.
- ISHIZAKA, K., & FLANAGAN, J.L. 1972. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell Syst. Tech. J*, **51**(6), 1233–1268.
- JULIER, S.J., & UHLMANN, J.K. 2004. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, **92**(3), 401–422.
- LJUNG, L. 1999. *System identification*. Wiley Online Library.
- PICCARDI, CARLO, & RINALDI, SERGIO. 2006. A Method for Parameter Estimation in Lur'e Systems. *I. J. Bifurcation and Chaos*, 1461–1470.
- SCHEINERMAN, E.R. 1996. *Invitation to dynamical systems*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.

- SLOTINE, J.J.E., LI, W., *et al.* . 1991. *Applied nonlinear control*. Vol. 199. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- VOSS, H.U., TIMMER, J., & KURTHS, J. 2004. Nonlinear dynamical system identification from uncertain and indirect measurements. *International journal of bifurcation and chaos in applied sciences and engineering*, **14**, 1905–1934.
- WALTER, É., & PRONZATO, L. 1994. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*.